Lineare Algebra

Übungsstunde 11

1. Orga
2. GA
3. Recap: Letzte Übungsstunde
4. Recap: A10
5. Priorisierte Wiederholung
6. Aufgaben
7. Nächste Woche

*. Basisexchange

1. Orga

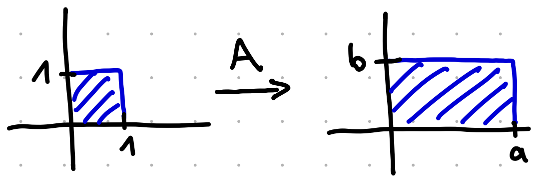
- Hab gerade viel Zeugs going on
  - ↳ Fokus: Übungsstunde
  - ↳ Korrektur: kommt

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 10
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

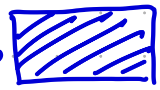
3. Recap: Ü10

Determinanten : Geometrisch

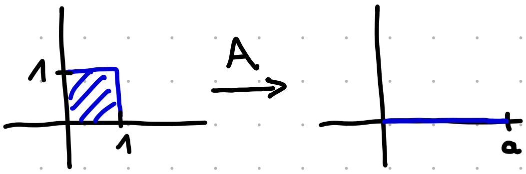


$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ „$\det A :=$ Flächenänderung durch A"

$\det A = ab$

1  $\cdot \det A = b$  a

D.h., wenn wir eine singulare Abbildung haben bzw. $N(A) \neq \{0\}$, $\dim N(A) \geq 1$:

$\Rightarrow$ 

$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ singular

$\boxed{\det A = a \cdot 0 = 0}$ 1  $\cdot \det A =$  a

Wichtig

- $\det A = \begin{cases} \neq 0, & A \text{ ist regular } \operatorname{rank} A = n, \; N(A) = 0 \\ = 0, & A \text{ ist singular } \operatorname{rank} A < n \end{cases}$

- Linear auf jeder Zeile:

  $\Rightarrow \boxed{\det(\lambda A) = \lambda^n \det A}$

- es gibt verschiedene Art und Weisen, wie man die Determinate berechnen kann!

Determinanten berechnen

① $\boxed{\text{Singular}}$? $\Rightarrow \det A = 0$, $\boxed{\text{Diagonal}}$ / Dreieck ... $\rightarrow$ besondere Eigenschaft

② $\boxed{\text{Definition}}$ (bis $n=3$ empfohlen)

$|a| = a$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$, $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - fha - ibd$

③ $\boxed{\text{Entwickeln nach Zeile/Spalte}}$

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = (-1)^{\underbrace{2+1}_{i+j}} d \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} e \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} f \begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cancel{a} & b & c \\ d & \cancel{e} & \cancel{f} \\ \cancel{g} & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & \cancel{b} & c \\ \cancel{d} & e & \cancel{f} \\ g & \cancel{h} & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b & \cancel{c} \\ \cancel{d} & \cancel{e} & f \\ g & h & \cancel{i} \end{bmatrix}$$

Entwicklung nach der 2. Zeile

④ $\boxed{\text{Gauß}}$

$$\boxed{\det A = (-1)^k \cdot \det(\tilde{A})} = (-1)^k \cdot \prod_{i=1}^{n} (\tilde{a}_{ii}) =$$

wobei: $k :=$ # Zeilenvertauschungen

Sinn: A in Zeilenstufenform bzw. $\tilde{A}$ ist ja eine obere Δ-Matrix $\Rightarrow$ easy Determinante ausrechnen!

⑤ $\boxed{\text{Blockmatrix}}$ erkennen.

$$\det\begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D \end{bmatrix} = \det A \det D, \quad \det\begin{bmatrix} A & 0 \\ C & D \end{bmatrix} = \det A \det D$$

4. Recap: A10

- Eure Lösungen
- Sehr nice!

• **Meine Lösung**

1. Computing determinants (hand-in) (★☆☆)

a) For what values of $a, b, c \in \mathbb{R}$ is the determinant of the following matrix zero? (You should justify your answer.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & c \\ a & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & b & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Hint: Use Proposition 5.1.13.

a)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & c \\ a & 5 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & b & -1 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det A = b \begin{vmatrix} 0 & 1 & 4 & c \\ a & 5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = b(-a) \begin{vmatrix} 1 & 4 & c \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -ab \left(c \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

$$= -abc(-6+4) - ab(1+8)$$

$$= 2abc - 9ab$$

$$= ab(2c-9)$$

$\Rightarrow a = 0$ or $b = 0$ or $c = \frac{9}{2}$, then $\det A = 0$.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \boxed{0} & 4 & c \\ a & 5 & \boxed{0} & 4 & -1 \\ 2 & 1 & \boxed{b} & -1 & -3 \\ 0 & -2 & \boxed{0} & 1 & 0 \\ 0 & -4 & \boxed{0} & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Entwicklung nach 3. Spalte:

$$\det A = 0 + 0 + (-1)^{3+3} b \cdot \det \begin{bmatrix} \boxed{0} & 1 & 4 & c \\ \boxed{a} & 5 & 4 & -1 \\ \boxed{0} & -2 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix} + 0 + 0$$

Entwicklung nach 1. Spalte:

$$= b \cdot \left(0 + (-1)^{2+1} a \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 4 & \boxed{c} \\ -2 & 1 & \boxed{0} \\ -4 & 3 & \boxed{1} \end{bmatrix} + 0 + 0\right)$$

Entwicklung nach 3. Spalte:

$$= b \cdot (-a) \cdot \left((-1)^{1+3} c \cdot \det \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} + 0 + (-1)^{3+3} 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= b \cdot (-a) \cdot \left(c \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

b) We know that the determinant of a triangular matrix is easy to calculate. Moreover, the determinant does not change when a multiple of a row is added to another row (and row swaps only change the sign). This allows us to efficiently determine the determinant of any matrix using Gauss elimination (or LU-decompositions).
Determine the determinant of

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

by performing the Gauss elimination manually.

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -2\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

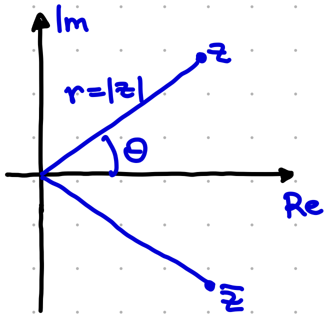
$\Rightarrow \det B = (-1)^0 \cdot (1 \cdot 2 \cdot (-1))$

$= \underline{\underline{-2}}$

5. Priorisierte Whl.

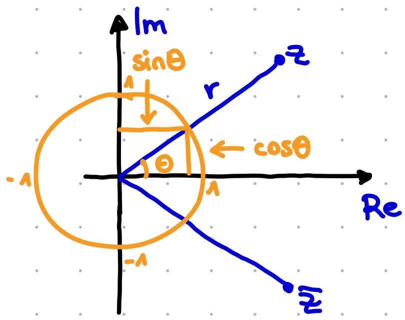
Complex numbers

- Imaginary number: $\boxed{i=\sqrt{-1}}$ bzw. $i^2=-1$, löst $x^2=-1$
- Complex number: $\boxed{z=x+iy}$, $\mathrm{Re}(z)=x$, $\mathrm{Im}(z)=y$
- Conjugate: $\boxed{\bar{z}=x-iy}$, $\mathrm{Im}(\bar{z})=-\mathrm{Im}(z)$
- Modulus (norm, Betrag): $\boxed{|z|=\sqrt{x^2+y^2}}=\sqrt{z\bar{z}}$
- Multiplication: $zw=\boxed{(a+ib)(c+id)=ac-bd+i(ad+bc)}$
- Division: $\boxed{\frac{z}{w}=\frac{z\bar{w}}{|w|}}$
- Graphisch:



Forms

- Cartesian form: $\boxed{z=x+iy}$
- Polar form:
  - Euler form: $\boxed{z=re^{i\theta}}$
  - Trigonomical form $\boxed{z=r(\cos\theta+i\sin\theta)}$, wobei $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$



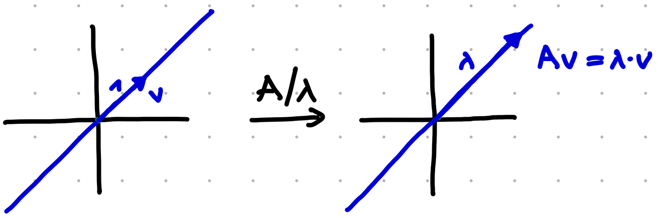
$e^{i\theta}=\cos\theta+\sin\theta$

Introduction: Eigenvalues, Eigenvectors

- Wir schauen uns besondere Vektoren v an, wobei gilt, dass:

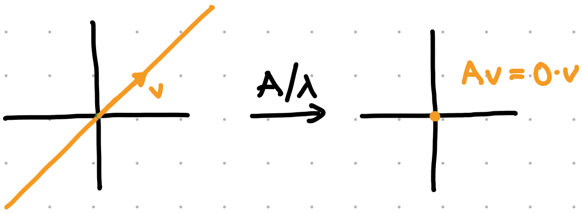
  $\boxed{Av = \lambda v}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $v \neq 0 \wedge A$ ist $n \times n$!

  Das heißt geometrisch:



- A entspricht für Vektoren span{v} einfach einer skalaren Mult. mit λ.
- Ebenfalls nice: Was passiert wenn für A $\exists \lambda$ mit $\lambda = 0$?

  ↳ Dann ist A singulär!



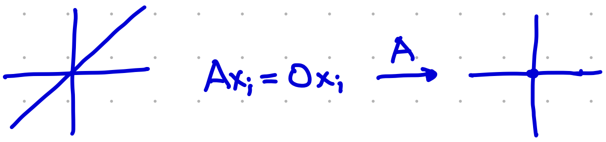
Definition + Begriffe

- Sei $F: V \to V$, $\exists$ ein x mit $\boxed{F(x) = \lambda x}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}$!

  $\Rightarrow$ $\boxed{x \text{ ist ein Eigenvector}}$ mit $\boxed{\text{Eigen value } \lambda}$ und $x \neq 0$!

- $\boxed{\exists \lambda = 0}$? $\Rightarrow$ A ist singulär $\Leftrightarrow$ Vektoren zerfallen in den 0 bzw. $\exists$ span{x}, $Ax = 0x = 0$

  Für span{x} gilt:



  $\Rightarrow N(A) \neq \{0\}$

- Trace (Spur): $\boxed{Tr(A) := \text{Summe diag}(A)}$ $\quad Tr\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\right) = 1 + 4$
- EV/EW finden: Characteristic Polynom: $\boxed{\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda I)} = (-\lambda)^n + \text{spur}A \cdot (-1)^{n-1} + \dots + \det A$

  $= (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (\lambda_n - \lambda)$ $\quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ EW

  Bsp: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)$

  btw, $\forall A$ $\exists$ mind. 1 Eigenwert da nach Fundamentalsatz Alg.

hat jedes Polynom Grad n genau n 0-Stellen! | könnte Komplex sein und z.B. $\chi_A(\lambda) = (i-\lambda)^n$ ↑ dann nur 1 EW.

- geometrische Vielfachheit eines EW: $\boxed{\text{\# l.u. EV des EW}}$
- algebraische Vielfachheit eines EW: $\boxed{\text{Vielfachheit der Nullstelle vom EW}}$ = Grad k mit $(\lambda_i - \lambda)^k$

Herleitung: EW/EV finden

- Betrachte: $Av = \lambda v$, wir suchen alle möglichen λ mit $v \neq 0$

$$\Leftrightarrow Av = I\lambda v$$

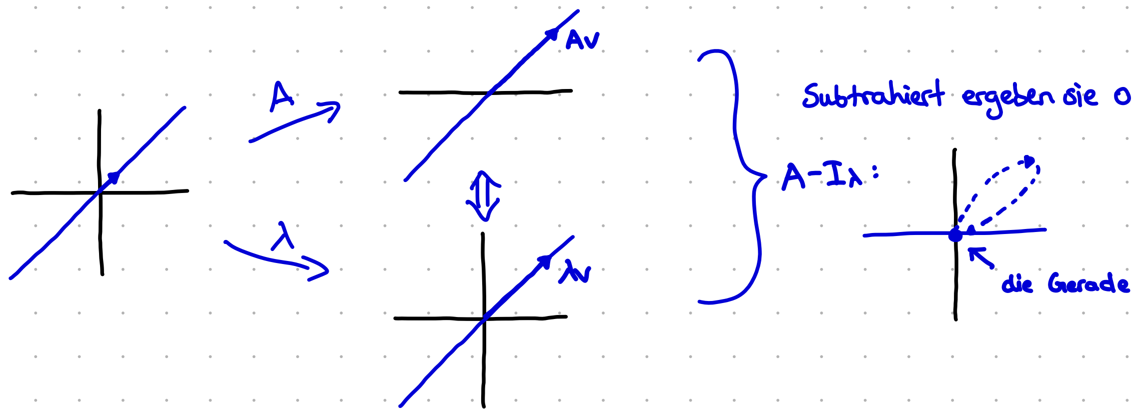
$$\Leftrightarrow Av - I\lambda v = 0$$

$$\Leftrightarrow (A - I\lambda)v = 0$$

↑ $v \neq 0$ per Def.

$\Rightarrow (A - I\lambda)$ muss singulär sein, damit das homogene LSE $(A - I\lambda)v = 0$ Lsgn hat.

Jetzt: $(A - I\lambda)$ ist genau dann singulär, falls λ ein EW ist. Grund:



Nur falls λ ist EW, bildet $(A - \lambda I)$ hier eine ganze Gerade (Dimension) auf 0 ab.

↪ $N(A) \neq \{0\}$

- Jetzt: Wir wollen, dass $(A - I\lambda)$ singulär

Option 1: Gauß? ... lieber nicht!! $\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 5 & 3-\lambda \end{pmatrix}$ ← sowas will man nicht gaußen!

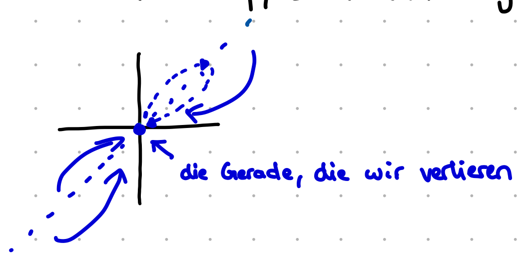
Option 2: Determinante!

Wir wissen: $\boxed{\det(A - I\lambda) = 0 \Rightarrow (A - I\lambda) \text{ ist singulär}}$.

$\Rightarrow$ Um EW zu finden, müssen wir die Nullstellen von $\boxed{\chi_A(\lambda) = \det(A - I\lambda)}$ ausrechnen.

Char-Polynom.

$\Rightarrow$ Alle EV von λ_i, sind dann folglich im $N(A - I\lambda_i)$



6. Aufgaben

Aufgabe 4 (HS19 inspiriert)

Sei $\mathbf{A}$ gegeben durch

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$.

$$\chi_A(\lambda) = \det(A - I\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) - 3(0) = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 1}, \quad \boxed{\lambda_2 = 2}$$

b) Bestimmen Sie zu jedem Eigenwert der Matrix $\mathbf{A}$ die zugehörigen Eigenvektoren.

- Für $\lambda_1 = 1$:

$$N\left(\begin{pmatrix} 1-1 & 3 \\ 0 & 2-1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_1$ ist freie Var, $x_1 = t \in \mathbb{R}$

Aus II: $x_2 = 0$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}$

$\Rightarrow \boxed{\text{span} \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \}}$, EV von λ_1.

- Für $\lambda_2 = 2$:

$N(\begin{pmatrix} 1-2 & 3 \\ 0 & 2-2 \end{pmatrix})$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$

$\Rightarrow x_2$ freie Var, $x_2 = t \in \mathbb{R}$ bel.

Aus I: $-x_1 = -3t$

$x_1 = 3t$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{ t \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

$\Rightarrow \text{span} \{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \}$, EV von λ_2

c) Geben Sie die geometrische und algebraische Vielfachheit von **A** an. Ist A diagonalisierbar?

- $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^1 (2-\lambda)^1$

$\Rightarrow$ algebraic multiplicity of $\lambda_1 = 1$ ist 1

$\lambda_2 = 2$ ist 1

- Anzahl l.u. Eigen vectors $= 1$

$\Rightarrow$ geometrical multiplicity of λ_1, λ_2 ist 1.

kommt vllt. noch genauer

Aufgabe Zusatz

Berechne die Eigenvalues von $A = \begin{bmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (3-\lambda)(-1-\lambda) - (-2)(4) = 0$$

$$-3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 8 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

Wir verwenden p, q - Formel:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{-2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-2}{2}\right)^2 - 5}$$

$$= 1 \pm \sqrt{-4}$$

$$= 1 \pm \sqrt{(-1)\,4}$$

$$\boxed{= 1 \pm 2i}$$

evtl. nicht Prüfungsrelevant, aber verdeutlicht Eigenvalues nochmal

7. Nächste Woche (12)

- Basis exchange
- Eigen basis ^ Eigenvalue decomposition ← decomposition 4/5

$$A = V \Lambda V^{-1}$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \ddots \end{bmatrix}$$

*. Basis Exchange

- Werde ich nochmal überarbeiten und die Essenz extrahieren!