

Lineare Algebra

Übungsstunde 12

1. Orga
2. GA
3. Recap: Letzte Übungsstunde
4. Recap: A11
5. Basisexchange
6. Priorisierte Wiederholung
7. Aufgaben
8. Nächste Woche

1. Orga

- Wir sind am Ende des Semesters angekommen!

↳ für die letzten beiden Ü-Stunden hab ich mir überlegt:

(Heute, 13.12): • (Alle) Themen abschliessen

(NW, 21.12): • Test Final (leider kommt Mock-Exam am 22.12...)

- Summary von allen Themen
- Prüfungsvorbereitung

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 11

↳ Worum ging's

↳ ...

- [3-5 Minuten] Gegeben eine Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}.$$

Wie würdet ihr hier $\det A$ bestimmen?

• Lösung:

Um die Determinante von $A = \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ zu bestimmen, verwenden wir Gauß.

Denn es gilt: $\det A = \det \tilde{A} \cdot (-1)^k$, wobei $\tilde{A} := A$ in ZSF, $k := \#$ Zeilenvertauschungen

Das ist der Trick. Weil $\tilde{A}$ eine obere Δ -Matrix ist.

$$\begin{pmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{pmatrix} \begin{matrix} -I \\ -I \\ -I \\ -I \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & b-a & c-a & c-a \\ 0 & b-a & c-a & d-a \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -II \\ -II \\ -II \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & c-b & d-b \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -III \\ -III \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} a & a & a & a \\ 0 & b-a & b-a & b-a \\ 0 & 0 & c-b & c-b \\ 0 & 0 & 0 & d-c \end{pmatrix} = \tilde{A}$$

$\tilde{A}$ ist obere Δ -Matrix

$\hookrightarrow \det = \prod \text{Diag}$

$$\Rightarrow \det A = (-1)^0 \cdot \det \tilde{A} = a(b-a)(c-b)(d-c)$$

3. Recap: Ü11

■ Eigenvalues & Eigenvectors Summary

(1) Definition: Falls für A gilt $A v = \lambda v$ } A ist $n \times n$, square!
 $\lambda \in \mathbb{C}$
 $v \neq 0$
 $\Rightarrow \lambda$ ist Eigenwert mit Eigenvektoren
 v gehört λ , nicht A

(2) Berechnen:
• $\lambda \in \mathbb{C}$ ist EW von A $\iff \det(A - I\lambda) = 0$
• $v \neq 0$ ist EV von λ $\iff v \in N(A - I\lambda) = 0$

(3) Singular/Regular: Falls für $A \exists \lambda$ mit $\lambda = 0 \Rightarrow A$ ist singular ($\text{rank } A < n$)
sonst regular ($\text{rank } A = n$)

(4) Anzahl:

- Jede Matrix hat mind. 1 EW $\lambda \in \mathbb{C}$ (nicht unbedingt $\lambda \in \mathbb{R}$!)

- EW λ können mehrere dim EV haben!

$\hookrightarrow$ Wie viele EV λ haben kann beschränkt ihre algebraic multiplicity
= Grad der Nullstelle
= EW

$$\det(A - I\lambda) = \dots (\lambda - \lambda_i)^k (\lambda - \lambda_j)^l \dots$$

$\hookrightarrow$ Die Summe der alg mul. von allen EW ist immer n (Fundamentalsatz Algebra)

$\hookrightarrow$ Die tatsächliche dim beschreibt die geometric multiplicity.

$$= \dim N(A - I\lambda)$$

$$= \text{Anzahl l.u. EV von } \lambda \text{ (dim EV von } \lambda)$$

$\hookrightarrow$ es gilt $\text{geo mul} \leq \text{alg mul}$, warum?

empfohlen sich mal
all das zu überlegen
mit Hilfe
math stackexchange

z.B.:

How to prove that eigenvectors from different eigenvalues are linearly independent [duplicate]

Asked 12 years, 8 months ago Modified 1 year, 11 months ago Viewed 140k times

This question already has answers here:
Finite sum of eigenspaces (with distinct eigenvalues) is a direct sum (3 answers)
Closed last year.

How can I prove that if I have n eigenvectors from different eigenvalues, they are all linearly independent?

Featured on
Seeking for
Update to
Linked

(5) Eigenbasis:

- Falls A hat genau n l.u. EV (complete set of EV)

bzw. falls $\forall \lambda$: alg mul = geo mul

bzw. $\Leftrightarrow A$ ist diagonalizable bzw. $\exists$ Eigenvalue decomp. $A = V \Lambda V^T$

■ Complex numbers

- Korrektur Division: $\frac{z}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}$ ←

4. Recap: A11

• Meine Lösung

• 1. Eigenvalues of rotations and reflections (★★☆)

Consider two linear transformations $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ and $\Psi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ where Φ is a rotation around the y -axis (i.e. the axis given by e_2) by $\frac{\pi}{3}$, and Ψ is the reflection through the plane $P = \{[x \ y \ z]^T \in \mathbb{R}^3 : 3x + 4y = 0\}$.

Note that the rotation is specified according to the right-hand rule¹: if you imagine your right thumb to be the vector e_2 , then slightly curling the other fingers on your right hand will give you the direction of the rotation.

a) Find a matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ such that $Ax = \Phi(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= \begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & 0 & -\sin \frac{\pi}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \frac{\pi}{3} & 0 & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Spick! (Rotationsmatrizen $\wedge$ sin, cos Tabelle)

b) Find a matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ such that $Bx = \Psi(x)$ for all $x \in \mathbb{R}^3$.

b) Aufgabe: Finde B sodass B spiegelt jeden Vektor an P .

↳ da Spiegelung an Ebene stets senkrecht zur Ebene

⇒ (1) wir müssen Vektoren auf P projizieren,

(2) dann die Distanz nochmal gehen

(1) Bel. Vektor x auf P projizieren heißt die Werte von x senkrecht zu P abziehen

⇒ wir brauchen den Normalvektor n von P

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, 3x + 4y = 0 \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist orthogonal zu } P \quad (\text{Analytische Geometrie})$$

$$\Rightarrow \left\| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \begin{pmatrix} 3/5 \\ 4/5 \\ 0 \end{pmatrix} = n$$

Nun können wir genau ...

5. Basis Exchange

■ Intuition: Basis Exchange

- Wenn wir über Basis eines VS V reden, dann meistens gehen wir von der Standardbasis aus:

$$B = \{e_1, \dots, e_n\}$$

z.B.: $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ von $\mathbb{R}^3$

↳ Es gibt aber auch andere Basen:

z.B.: $\tilde{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

oder $\hat{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$

↳ In fact: es gibt ∞ -viele!

- Lass es uns darstellen anhand $\mathbb{R}^2$:

Bsp:

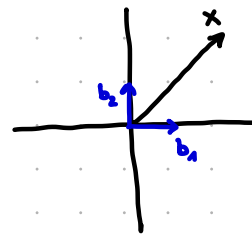
$$B_\bullet = \{b_1, b_2\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_\bullet = \{b_1, b_2\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

des $\mathbb{R}^2$ mit x

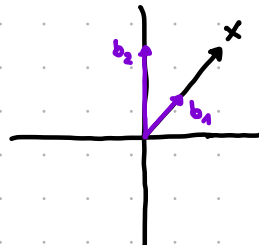


$$\Rightarrow x = 2b_1 + 2b_2$$

$$[x]_{B_\bullet} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{B_\bullet} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

+



$$\Rightarrow x = 2b_1 + 1b_2$$

$$[x]_{B_\bullet} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[x]_{B_\bullet} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Je nach Basis erhalten wir andere Koordinatenvektoren für den selben Vektor.

↳ insofern kann man sagen gibt jede Basis den VS ihre Sprache

■ Intuition: Linear Transformations with Basis Exchange

- Schauen wir uns nun eine Lineare Abbildung an: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, mit

$$F\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

↳ Betrachten wir die Abbildungsmatrix A von F :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}$$

↳ Ganz formal haben wir actually, dass

$$F: x \mapsto y$$

$$A: [x]_{B_\bullet} \mapsto [y]_{C_\bullet}, \quad \text{wobei hier } B_\bullet = C_\bullet = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

bzw:

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = y$$

$$[x]_{B_\bullet} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{A_\bullet = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = [y]_{C_\bullet}$$

↳ Mit Worten: Die Abbildungsmatrix beschreibt F , aber unter jeweiligen Basen!

- Betrachten wir also eine andere Basis, so kriegen wir eine andere Matrix!

$$F: x \mapsto y$$

$$A: [x]_{B_\bullet} \mapsto [y]_{C_\bullet}, \quad \text{wobei hier } B_\bullet = C_\bullet = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$A: [x]_{B_\bullet} \mapsto [y]_{C_\bullet}, \quad \text{wobei hier } B_\bullet = C_\bullet = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[x]_{B_\bullet} = \begin{pmatrix} b \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_\bullet = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a}{2} \end{pmatrix} = [y]_{C_\bullet}$$

$$x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{F} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = y$$

$$[x]_{B_\bullet} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \xrightarrow{A_\bullet = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} = [y]_{C_\bullet}$$

⇒ Je nach Basis erhalten wir eine andere Abbildungsmatrix!!

⇒ Da wir ∞ Basen haben fragen sich schlaue Mathematiker...

können wir maybe die finden, sodass $\tilde{A}$ ist Diagonal? $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \diagdown \end{bmatrix}?$

⇒ Ja! SVD! (EVD auch)

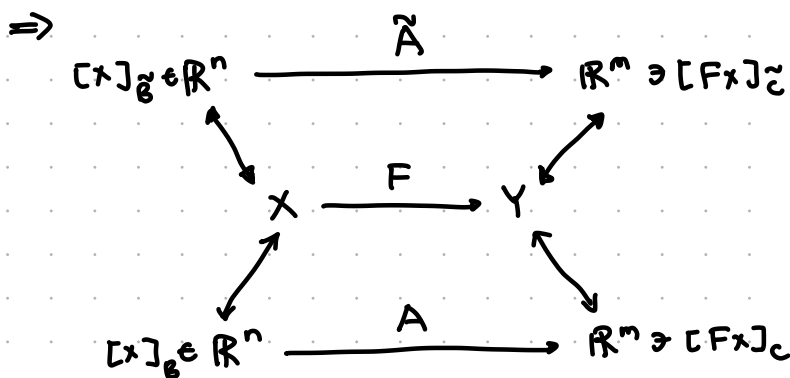
• Lass uns das Ganze formalisieren:

↳ Gegeben eine LT $F: X \rightarrow Y$ mit $\dim X = n$, $\dim Y = m$

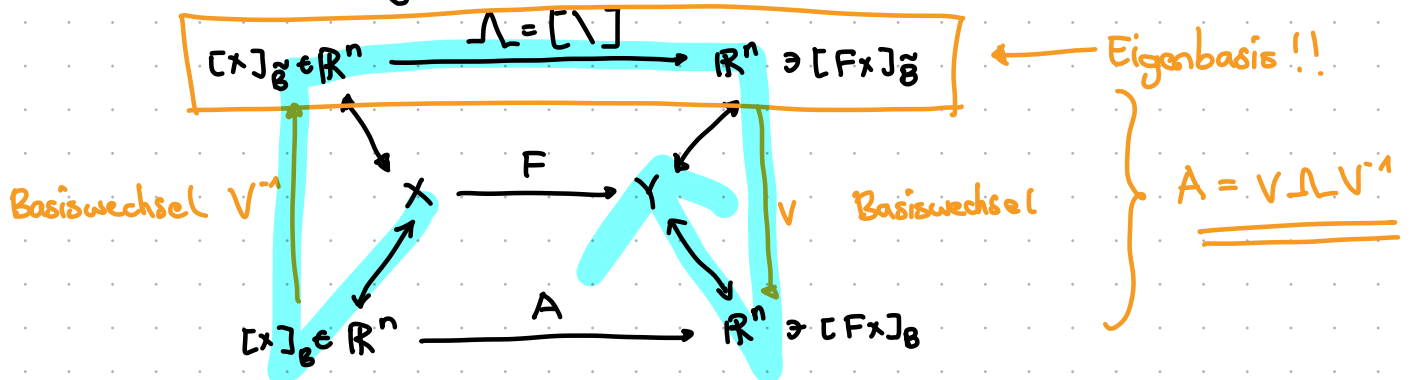
$$\Rightarrow F: X \rightarrow Y, x \mapsto Fx$$

$$A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, [x]_B \mapsto [Fx]_C$$

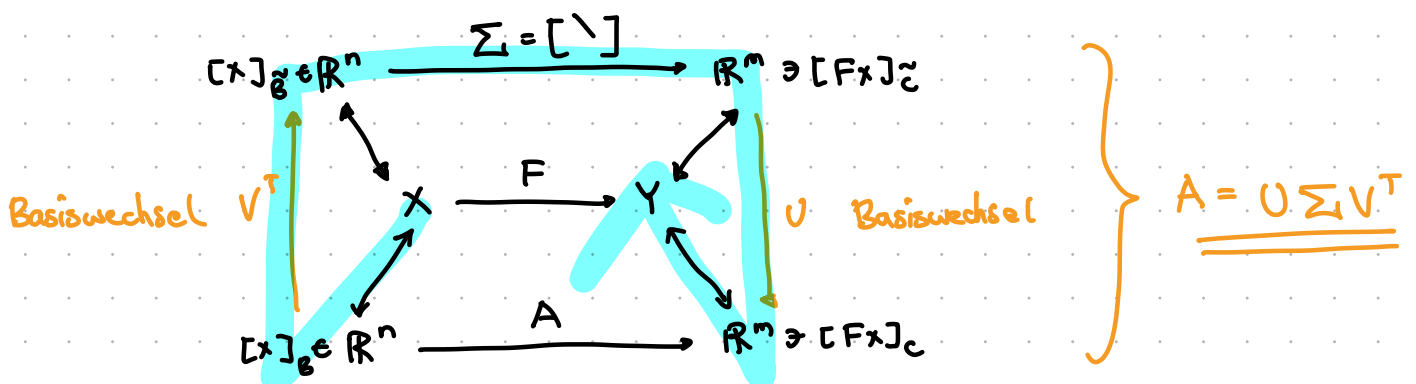
$$\tilde{A}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, [x]_{\tilde{B}} \mapsto [Fx]_{\tilde{C}}$$



• EVD macht für diagonalisierbare Matrizes A :



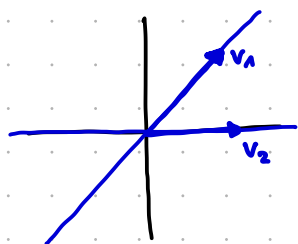
• SVD macht das für alle $m \times n$ Matrizes A :



■ Intuition : Eigen value decomposition

- Betrachten wir eine Abbildung mit Abbildungsmatrix A .

Spannen die Eigenvektoren von A den ganzen Vektorraum, so $\exists$ für A eine Spektralzerlegung.



Seien v_1, v_2 l.u. Eigenvektoren und es gilt $\text{span}\{v_1, v_2\} = \mathbb{R}^2$

- Man nennt $\{v_1, v_2\}$ auch eine Eigenbasis des $\mathbb{R}^2$

- Jetzt die Erkenntnis:

↳ A wäre bezüglich dieser Eigenbasis ja bloß eine Skalierung!

Sie skaliert beide Basis-Eigenvektoren

⇒ deshalb auch eine Skalierung für alle Koordinatenvektoren

$[x]_{\text{Eigenbasis}} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ mit $\xi_1 :=$ So oft der 1. Basisvektor

$\xi_2 :=$ So oft der 2. Basisvektor

↳ werden die Basisvektoren skaliert, so auch $\vec{\xi}$

z.B. b_1 mit $\lambda_1=3$, b_2 mit $\lambda_2=4$

$$\Rightarrow A\vec{\xi} = \begin{pmatrix} 3\xi_1 \\ 4\xi_2 \end{pmatrix}$$

- Wir halten fest : Bezüglich einer Eigenbasis entspricht A einer Skalierung.

⇒ Eine Matrix die bloß skaliert ist immer diagonal. $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$

⇒ Bezüglich einer Eigenbasis entspricht A einer Diagonalmatrix!

6. Priorisierte Wkl.

■ Spektralzerlegung

- Eigenbasis: Eine Basis aus nur EV Alle EW haben gleiche gM wie A
- V ist eine regulär $n \times n$ Matrix $\hat{=}$ Eigenbasis, Spalten hat alle Eigenvektoren
- Λ ist eine diagonale $n \times n$ Matrix Aus allen Eigenwerten
- Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, diagonalisierbar
- Gesucht: $A = V \Lambda V^{-1}$
- Existiert nicht immer, falls A ist diagonalisierbar ($\forall$ EW $\Rightarrow$ geo mul. = alg mul.)

$${}^n A = \begin{bmatrix} V & \Lambda & V^{-1} \end{bmatrix}$$

■ EW/EV ähnlicher Matrizen

- Seien A, B ähnlich mit $B = T^{-1}AT$ bzw. $A = TBT^{-1}$

$$\Rightarrow \boxed{\chi_A(\lambda) = \chi_B(\lambda)} \text{ bzw. } \det A = \det B, \operatorname{Tr} A = \operatorname{Tr} B, \text{ EW von } A = \text{EW von } B, gV \wedge aV \\ \text{EV von } A \neq \text{EV von } B!$$

■ Symmetrische Matrizen + EW

- Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $\Rightarrow$

(1) Alle EW $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind reell

(2) Die EV zu EW sind paarweise orthogonal nicht orthonormal

(3) $\exists$ orthonormale Basis des $\mathbb{R}^n$ aus EV $u_1, \dots, u_n$

(4) Es gilt: wobei U ist orthogonal

$$\boxed{A = V \Lambda V^T}$$

- Positiv (semi) definit: $\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0$ gilt: $x^T A x > 0$ mit A ist Transpose

$$\Rightarrow \boxed{\text{Alle EW} > 0}$$

■ Singular value decompositions

- U ist eine orthogonale $n \times n$ Matrix und diagonalisiert $A^T A$
- V ist eine orthogonale $m \times m$ Matrix und diagonalisiert $A A^T$
- Σ ist eine semi diagonale $m \times n$ Matrix

• Gegeben: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, bel!

• Gesucht: $A = U \Sigma V^T$

$$A = \begin{bmatrix} U_r & U^\perp \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \diagdown \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_r & V^\perp \end{bmatrix}^T$$

■ SVD berechnen

① $A^T A$ berechnen $A^T A \in \mathbb{R}^{n \times n}$

② Alle EW und EV bestimmen von $A^T A$

③ EV normalisieren Kein Gram-Schmidt nötig (meistens)! (EV sind orthogonal von sym. Matrizen.)

④ EW der Größe nach sortieren: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_n = 0$

⑤ U und Λ bilden $\Lambda \in \mathbb{R}^{n \times n}$ diagonal

⑥ Σ_r bestimmen mit $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_r \\ & & \end{bmatrix}$$

⑦ V_r entnehmen, Σ_r^{-1} bilden

$$V_r \in \mathbb{R}^{n \times r} \quad \Sigma_r^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & \dots & \frac{1}{\sigma_r} \\ & & \end{bmatrix}$$

⑧ U_r berechnen, $U_r = A V_r \Sigma_r^{-1}$ $U_r \in \mathbb{R}^{m \times r}$

⑨ U_r ergänzen zu $U \in \mathbb{R}^{m \times m}$ mit $U^\perp \in \mathbb{R}^{m \times (m-r)}$ Gram-Schmidt möglicherweise

⑩ Σ_r ergänzen mit Nullen

⑪ V^T berechnen

7. Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben sind zwei Basen des Vektorraums $V = \mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

($\star \star \star$) Tatsächlich stellt sich heraus, dass $\mathcal{B}_1$ eine Eigenbasis mit Eigenwerten $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = 2$ ist.

Sei A die Abbildungsmatrix bezüglich $\mathcal{B}_0$ einer linearen Abbildung $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Eigenwerten λ_1 und λ_2 .

i) Bestimmen Sie A .

ii) Was wäre die Abbildungsmatrix von F bezüglich $\mathcal{B}_1$?

Wir sehen, da A eine Abbildungsmatrix mit EW λ_1, λ_2 ist und eine Eigenbasis mit λ_1, λ_2 existiert:

$\Rightarrow A$ ist diagonalisierbar bzw. $\exists$ Eigenwertzerlegung

$$A = V \Lambda V^{-1},$$

wobei V enthält alle Eigenvektoren, Λ alle Eigenwerte von A

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{[i]} \quad A &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -8 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ii) $\mathcal{B}_1$ ist genau die Eigenbasis $\Rightarrow \Lambda$.

■ Aufgabe 2

Sei A eine diagonalisierbare 2×2 Matrix mit $\text{rank} = 1$ und $\text{Tr}(A) = 12$.

(i) Welchen der folgenden EW hat A mit Sicherheit?

☐ 1

☐ 12

☐ 4

☐ 0

(ii) Was ist $\det A$?

(i) ☐ 1

☐ 4

☒ 12

☐ 0

A ist singular $\text{rang} = 1 < 2 = n$

Es gilt: $\boxed{\text{Summe EW} = \text{Tr}(A)}$ $\wedge$ $\boxed{\text{Produkt EW} = \det(A)}$

Hintergrund:

Similar Matrices haben das selbe Charakteristische Polynom!

$\Rightarrow$ gleiche Det, gleiche Trace und EW bzw. alg, geo mul (aber nicht gleiche EV!)

$\Rightarrow$ Wir wissen, A ist diagonalisierbar $\Rightarrow \exists V$ mit $A = V \Lambda V^{-1}$, wobei Λ diagonal.

$\Rightarrow$ Per Def. sind A und Λ ähnlich. Wir wissen: $\Lambda = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$
($\text{Tr } A = \text{Tr } \Lambda = 12$)

$\Rightarrow$ 12 null EWs

(ii) $\det A = 0$ da A singular bzw. $12 \cdot 0 = 0$.

8. Nächste Woche (13)

- Symmetric Matrices $\wedge$ Eigenvalues
- Positive (semi)-definit
- Similar Matrices
- Singular value decomposition

• $P(A)$

• Gram Matrix ?

• Cholesky Decomposition ?

• Matrix Norms



Falls wichtig, schauen wir uns das nächste Ü noch an.