Lineare Algebra

Übungsstunde 3

1. Orga
2. GA
3. Recap: A2
4. Priorisierte Wiederholung
5. Aufgaben
6. Nächste Woche
7. Quiz

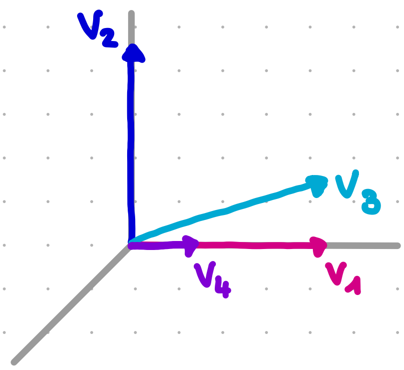
1. Orga

- Heute leider kein Quiz
- Wir haben eine Discord page!
- Diskmath Prüfungen

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 3
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

- [10 Minuten] Recap: Basics
  - Sei $V = \boxed{\mathbb{R}^3}$ ein Vector space über $\mathbb{R}$:



(Alle Vektoren befinden sich auf einer Ebene)

(1) Findet alle $\boxed{\text{lin. ind.}}$ Mengen Hint: z.B. $\{v_1, v_2\}$

(2) Findet alle $\boxed{\text{Lin. dep.}}$ Mengen

(3) Findet alle Mengen die einen Sub space der $\boxed{\text{Dimension } 1}$ spannen

(4) Findet alle Vektoren für die gilt: $\boxed{\text{rang } A = 2}$, wobei A enthält die jew. Vektoren.

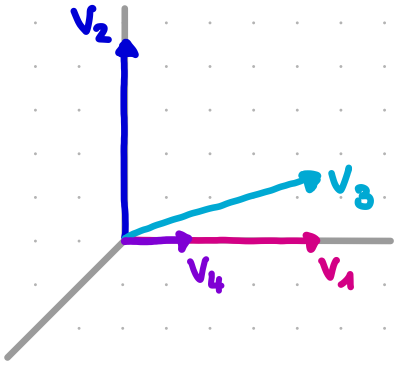
(5) Findet alle Vektoren für die gilt: $\boxed{C(A) = \mathbb{R}^3}$, wobei A enthält die jew. Vektoren.

(*) Bonus: kombiniere (wenn beide stmts zsm

(1) mit (4)

(2) mit (4)

- [10 Minuten] Recap: Basics Lösung
  - Sei $V = \boxed{\mathbb{R}^3}$ ein Vector space über $\mathbb{R}$:



(Alle Vektoren befinden sich auf einer Ebene)

(1) Findet alle $\boxed{\text{Lin. ind.}}$ Mengen

Alle Mengen mit ≥ 1 und ≤ 2 Vektoren, ohne $\{v_1, v_4\}$:

$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\},$
$\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_1\}$

(2) Findet alle $\boxed{\text{Lin. dep.}}$ Mengen

$\{v_1, v_4\}$ und alle Mengen mit >2 Vektoren:

$\{v_4, v_1\}, \{v_4, v_1, v_3\}, \{v_4, v_1, v_2\},$
$\{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_1\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

(3) Findet alle Mengen die einen Sub space der $\boxed{\text{Dimension } 1}$ spannen

Alle Mengen mit genau 1 Lin ind. Vektor:

$\{v_1\}, \{v_2\}, \{v_3\}, \{v_4\}, \{v_1, v_4\}$

(4) Findet alle Vektoren für die gilt: $\boxed{\operatorname{rang} A = 2}$, wobei A enthält die jew. Vektoren.
= Sub space Dim. 2

Alle Mengen mit genau 2 Lin ind. Vektoren:

$\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_1\}$
$\{v_4, v_1, v_3\}, \{v_4, v_1, v_2\}, \{v_2, v_3, v_4\}, \{v_2, v_3, v_1\},$
$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

(5) Findet alle Vektoren für die gilt: $\boxed{C(A) = \mathbb{R}^3}$, wobei A enthält die jew. Vektoren.
= spannt den ganzen Raum

Alle Mengen mit genau 3 Lin ind. Vektoren:

/ keine!

(*) Bonus: kombiniere

(1) mit (4) $\{v_2, v_3\}, \{v_2, v_1\}, \{v_2, v_4\},$
$\{v_3, v_4\}, \{v_3, v_1\}$

(2) mit (4) $\{v_4, v_1, v_3\}, \{v_4, v_1, v_2\}, \{v_2, v_3, v_4\},$
$\{v_2, v_3, v_1\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

3. Recap: A1

- **Eure Lösungen**

e)

$T = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ where a, b, c are arbitrary numbers.

Prove: $T^n = 0$ T is nilpotent

Let's put $n=3$. $T^3 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Through trying one can clearly see that if the nxn matrix row/colums count is equal to the n in T^n, $T^n = 0$.

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & ac \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

What means „through trying"? — kein allgemeiner, präziser Beweis. ↳ siehe Musterlösung.

$n=3$ zeigt nicht $n \in \mathbb{N}$!

(1)

- Wenn ein Beweis für eine allgemeine Aussage z.B. mit $T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gefordert ist, reicht nicht aus für $T \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ zu zeigen!

$= I - 0$ ($A^k = 0$ by nilpotent)

$= I$

$0 = (0 \cdot n_{12}) + (n_{12} \cdot 0) + (n_{13} \ldots$

e) $\begin{bmatrix} 0 & n_{12} & n_{13} & \cdots & n_{1n} \\ 0 & 0 & n_{23} & \cdots & n_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & n_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & n_{12} & n_{13} & \cdots & n_{1n} \\ 0 & 0 & n_{23} & \cdots & n_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & n_{1n} \\ 0 & 0 & 0 \cdots & n_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

n_{nn}

at Step A^2, the n_{12} will become 0

at Step A^3, the n_{13} will become 0

⋮

at Step A^n, the n_{1n} will become 0

and by the order we multiply the A we can see that n_{1n} is the last Element that will be 0 at worst case.

$\Rightarrow T^n = 0$, n is the highest possible nilpotent degree

Korrekte Idee!

Jedoch etwas mehr formal ist gewünscht und mehr struktur. Sonst nice!

Scanned with CamScanner

(2)

- Hier allgemein bewiesen!
- Der Beweis ist jedoch etwas strukturlos und hat keine klare Argumentation.

e) $$T = \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & 0 & t_{23} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$t_{n \cdot n}$

Because the values of $t_{12}, t_{12}, t_{23}, t_{2n}$ etc. dont matter as long they are not 0, I will simplify by just using c for all of them. Ok, passt.

$$T = \begin{bmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ 0 & 0 & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \quad T \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

$$T^2 = \begin{bmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ 0 & 0 & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & c & c & \cdots & c \\ 0 & 0 & c & \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & c & \cdots & c \\ 0 & 0 & 0 & c \cdots & c \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \checkmark$$

We see that the first diagonal consisting of c is transformed to all 0's when multiplying T with itself. If we repeat this process n-1 times, the whole Matrix will be 0. Therefore T is nilpotent of degree n. ✓

warum?

sonst nice!

Hier noch für $T^k = \begin{bmatrix} \ldots \end{bmatrix}$

verbildlichen und formal begründen,

bzw. zeigen dass auch bei T^{k+1} gilt,

eine diag „weniger" nach $T^k T$.

(3)

- ziemlich schick für einen formlosen Beweis
- der „Induction step" müsste noch bewiesen werden

• **Meine Lösung:**

1. Matrix multiplication (hand-in) (★★☆)

a) For a natural number $k \geq 1$, we define the k-th power of a square matrix A as $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ times}}$ where $\times$ denotes matrix multiplication. Moroever, we define $A^0 = I$.

Now consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Find $x, y, z \in \mathbb{R}$ such that $A^3 + xA^2 + yA + zI = 0$. Note that both I and 0 are 3×3 matrices in this equation.

a)
$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 + xA^2 + yA + zI = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x & 0 \\ 0 & 3x & x \\ x & 0 & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & y \\ y & 0 & 3 \\ 0 & y & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1+z & x & 3+y \\ 3+y & 1+3x+z & 9+x+3 \\ x & 3+y & 1+3x+z \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow x = 0, \; y = -3, \; z = -1$$

b) Let A and B be $n \times n$ matrices. Assume that A and B are commuting, i.e. $AB = BA$. Prove that we have $(AB)^k = A^k B^k$ for all $k \in \mathbb{N}$.

b) Proof by induction, base case:

if $k = 0$: $(AB)^0 = I = A^0 = A^0 I = A^0 B^0$

if $k = 1$: $(AB)^1 = AB = A^1 B^1$

Step case: assuming $k \in \mathbb{N}$ fixed but arbitrary, we show that from $(AB)^k = A^k B^k$ follows $(AB)^{k+1} = A^{k+1} B^{k+1}$

$$(AB)^{k+1} = (AB)^k (AB)$$

$$\text{(assumpt.)} = A^k B^k AB$$

$$= A^k \underbrace{B \cdots B}_{k\text{-times}} AB$$

$$(\text{k-times commut.}) = A^k A B^k B$$

$$= A^{k+1} B^{k+1} \qquad \square$$

c) We say that a square matrix A is nilpotent if there exists $k \in \mathbb{N}$ such that $A^k = 0$. The minimal $k \in \mathbb{N}$ such that $A^k = 0$ is called the nilpotent degree of A.

Let A be a nilpotent matrix of degree $k \in \mathbb{N}$, and B be a matrix commuting with A. In particular, note that both A and B are square matrices. Is AB nilpotent? If yes, what can we say about the nilpotent degree of AB?

c) AB is nilpotent if $\exists\, m \in \mathbb{N}: (AB)^m = 0$.

aus b)

Since $(AB)^m = A^m B^m$ and if $m = k$ then $(AB)^k = A^k B^k = 0 B^k = 0$.

$\Rightarrow$ Yes, AB is nilpotent with degree at most k!

d) Let A be an $n \times n$ nilpotent matrix of degree $k \in \mathbb{N}$. Prove that $(I - A)(I + A + \ldots + A^{k-1}) = I$.

d) Using distributivity of matricies:

$$(I - A)(I + A + \ldots + A^{k-1})$$

$$= I + A + \ldots + A^{k-1} - (A + \ldots + A^k)$$

$$= I + A + \ldots A^{k-1} - (A + \ldots + A^{k-1} + 0)$$

$$= I + (A + \ldots + A^{k-1}) - (A + \ldots + A^{k-1})$$

$$= I \qquad \square$$

e) Let T be an $n \times n$ upper triangular matrix. Assume that the diagonal of T consists of 0's only. Prove that $T^n = 0$, i.e. T is nilpotent of degree less or equal to n.

e) Siehe Musterlösung, eure Lösungen.

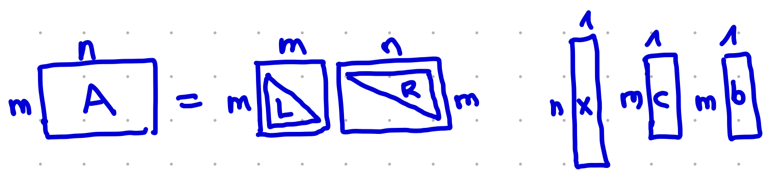
4. Priorisierte Whl.

Inverse Theorem

- A ist quadratisch $\boxed{n \times n}$, $\boxed{\operatorname{rang} A = n}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{AA^{-1} = A^{-1}A = I}$ $\Leftrightarrow$ A ist invertierbar
- Berechnen:
  - 1×1: $A = [a]$, $A^{-1} = [\frac{1}{a}]$ $(a \neq 0)$
  - 2×2: $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\underbrace{\det A}_{ad-bc}} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ viel schneller als Gauß!
  - $n \times n$: Gauß: $[\, A \mid I \,] \rightsquigarrow [\, I \mid A^{-1} \,]$
- Es gilt weiterhin: $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$

LU-Decomposition

- L ist untere Dreiecksmatrix und speichert Infos über Zeilensubtraktionen
- $U :=$ A in Echelon form (Zeilenstufenform)
- $A \in \mathbb{E}^{m \times n}$, $\boxed{A = LU}$, sprich $LUx = b \Rightarrow \boxed{Lc = b}$ mit $\boxed{Ux = c}$



Grund

- Mit Gauß und ZSF: $Ax = b \rightsquigarrow Ux = c$, $\boxed{\text{bzw. muss man für jedes b, b zu c bringen!}}$
- LU-Zerlegung: $Ax = b \rightsquigarrow LUx = b$, $\Rightarrow$ nur $Lc = b$ und $Ux = c$ berechnen $(\underbrace{\text{2x Vor/Rückeinsetzen}}_{O(n)!})$

$\boxed{\text{bzw. L und U berechnet man nur 1 mal und es gilt } \forall b!}$

5. Aufgaben

LR Zerlegung

① Gauß: $[A] \rightsquigarrow [U] \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{c} = b$

② $Lc = b$ lösen forward substitution $\Rightarrow c$

③ $Ux = c$ lösen backward substitution $\Rightarrow \underline{\underline{x}}$

- Bsp:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Gegeben: A, b Gesucht: x mit $Ax = b$ bzw. L, U mit $LUx = b$

$\boxed{1}$ Ins Schema

$$[A] \rightsquigarrow [U]$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -4 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$\boxed{2}$ Gaußen und L, R berechnen

$$\begin{bmatrix} \boxed{-2 \quad 3 \quad -1} \\ 4 \quad -4 \quad 2 \\ 2 \quad 1 \quad 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Pivotzeile} \\ +2\,\mathrm{I} \\ +\,\mathrm{I} \end{array}$$

$$E_{21} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ 2 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \qquad E_{31} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ 1 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 \quad 3 \quad -1 \\ \boxed{0 \quad 2 \quad 0} \\ 0 \quad 4 \quad 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \text{Pivotzeile} \\ -2\,\mathrm{II} \end{array}$$

$$E_{32} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow U = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} = E_{21}^{-1} E_{31}^{-1} E_{32}^{-1}$$

$\boxed{3}$ Forward substitution $Lc = b$

Herleitung: $Ax = b \Leftrightarrow L\underbrace{Ux}_{c} = b \Leftrightarrow Lc = b$ (da $A = LU$)

Wir sagen: $Ux = c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 1 & -5 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Aus I: $\boxed{c_1 = -5}$

Aus II: $10 + c_2 = 6 \Rightarrow \boxed{c_2 = -4}$

Aus III: $5 - 8 + c_3 = -5 \Rightarrow \boxed{c_3 = -2}$

$$\Rightarrow \boxed{c = \begin{bmatrix} -5 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}}$$

$\boxed{4}$ Backward substitution: $Ux = c$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 3 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Aus III: $\boxed{x_3 = -1}$

Aus II: $\boxed{x_2 = -2}$

Aus I: $-2x_1 - 6 + 1 = -5 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0}$

$$\Rightarrow \boxed{x = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}}$$

6. Nächste Woche (2)

- LU-decomposition with Permutation $PA = LU$
- Transponierte (Transpose A^T)
- Symmetrische Matrix $A^T = A$
- LDL-decomposition $A = LDL^T$

2.4

- Vector space (mehr-dimensionales „Field")
  - Subspace
  - Column space $C(A) = \text{span} A$ = Lsgm. des $Ax = b$

3.1

- Null space $N(A)$ = Lsgm. des $Ax = 0$
- Echelon form = Zeilenstufenform $\begin{bmatrix} a & d & f \\ & b & e \\ & & c \end{bmatrix}$
  - Reduced Echelon form $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$
- Gauss-Jordan elimination

3.2, maybe

7. Quiz