Lineare Algebra

Übungsstunde 4

1. Orga
2. GA
3. Recap: A3
4. Priorisierte Wiederholung
5. Aufgaben
6. Nächste Woche
7. Quiz

1. Orga

- Wir sind angekommen!

Basics (wichtig, einfach)	Schlüssel (wichtig, schwierig)	Advanced (braucht Basics & Schlüssel)
Vektoren & Matrizen	Vektorräume	Orthonormalbasen
LGS & Gauss	Koordinaten & Basiswechsel	QR Zerlegung
LR Zerlegung	Lineare Abbildungen	Least Squares
Orthogonalität		Determinanten
		Eigenwerte & Eigenvektoren
		SVD

- diese, nächste Woche
- danach, Schlüssel, Schlüssel (Tempo wird erhöht, hier schalten die aller meisten ab!)

↳ alle roten Themen Basics + Vektorräume gut beherrschen

- Hier etwas Struktur:

Vectors & Matrices

Vector:
- linear combination
- scalar product, norm, orthogonal
- linear (in)dependence

Matrix:
- identity, null, squared, triangular, diagonal, ...
- multiplication, distributivity, ...
- inverse
- transpose, symmetric

LSE & Gauss

LSE:
- linear systems of equations (Ax = b)
- pivot, rank, column space (span, C(A))
- *solution space, over-/under-determined*
- *null space (N(A))*

Solving LSE (Elimination):
- via Gauss: elimination matrix, *(reduced)echelon form*
- via Inverse theorem
- back substitution

LU Decomposition

Solving LSE (Elimination):
- via LU decomposition
  - symmetric (LDL^T), permutation (PA = LR)
- forward substitution

Vector Spaces

Vector Space:
- field
- vector space
- sub space
- *basis, dimension*

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 3
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

3. Recap: A3

- **Eure Lösungen**
- Habt ihr sehr schön gemacht!

- **Meine Lösung:**

1. Elimination, back substitution, LU factorization (hand-in) (★☆☆)

a) Compute an LU factorization of the matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & -12 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -11 & -5 \end{bmatrix}$.

b) Given the factorization $A = LU$ from above, solve the linear system $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ with $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix}$.

c) Given the solution $\mathbf{y}$ to the linear system $L\mathbf{y} = \mathbf{b}$ above, solve the linear system $U\mathbf{x} = \mathbf{y}$ (for $\mathbf{x}$).

d) Given the solution $\mathbf{x}$ for the system above, prove that $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, i.e. $\mathbf{x}$ also solves this system.

a) Gauß-elimination:

$$\begin{bmatrix} 2 & -12 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -11 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -\frac{1}{2}\mathrm{I} \\ -\mathrm{I} \end{matrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -11 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{1}{2}\mathrm{II} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -12 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix}}_{=U}$$

b) $Ly = b$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 1/2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 1/2 & 1 & 25 \end{array}\right] \begin{matrix} \Rightarrow y_1 = 4 \\ \Rightarrow y_2 = 4 - 2 = 2 \\ \Rightarrow y_3 = 25 - 4 - 1 = 20 \end{matrix} \Bigg\} \Rightarrow y = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 20 \end{bmatrix}$$

c) $Ux = y$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -12 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 20 \end{array}\right] \Rightarrow x_3 = -2$$

Aus II: $2x_2 = 2 + 2x_3$

$x_2 = 1 - 2 = -1$

I: $2x_1 = 4 + 12x_2 - 6x_3$

$x_1 = 2 - 6 + 6 = 2$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

d) $$Ax = \begin{bmatrix} 2 & -12 & 6 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -11 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+12-12 \\ 2+4-2 \\ 4+11+10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 25 \end{bmatrix} = b. \quad \square$$

4. Priorisierte WhL.

LU Decomposition with Permutation

- Permutation matrix: $P := I$, mit Zeilen-/Spaltenvertauschungen $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \dots$
- $\boxed{PA = LU}$, sprich $LUx = Pb \Rightarrow \boxed{Lc = Pb}$ mit $\boxed{Ux = c}$
- Achtung: Das Pivotieren vertauscht auch die l_{ij}'s von L! Deshalb reicht $Lc = Pb$ aus, statt $PLc = Pb$

  ① Gauß: $\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} U \end{bmatrix} \Rightarrow L\underbrace{Ux}_{c} = Pb$

  ② $Lc = Pb$ lösen forward substitution $\Rightarrow c$

  ③ $Ux = c$ lösen backward substitution $\Rightarrow \underline{\underline{x}}$

- $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \end{bmatrix}_{-2I} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} & & \\ 0 & & \\ 2 & 0 & \end{bmatrix}$

- $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -I \\ +I \end{matrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} & & \\ -1 & & \\ 1 & 0 & \end{bmatrix}$

  $\Rightarrow l_{21} = 1$, $\Rightarrow l_{31} = -1$ $\quad\Rightarrow l_{21} = -1$, $l_{31} = 1$

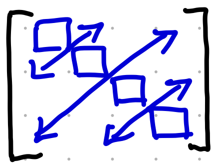
Transpose

- A: $m \times n$, $\boxed{A^T: n \times m}$

  $\begin{bmatrix} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{2} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1\downarrow & 2\downarrow \end{bmatrix}$ Zeile wird Spalte

Symmetric matrix

- A ist quadratisch $\boxed{n \times n}$ und $\boxed{A^T = A}$



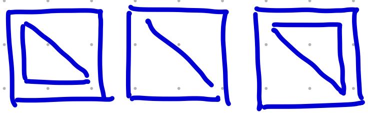
□ beliebig ↗ muss übereinstimmen $\begin{bmatrix} x & a & b \\ a & y & c \\ b & c & z \end{bmatrix}$

Symmetric LU Decomposition

- Gegeben $\boxed{A \text{ ist symmetric}}$

  $\Rightarrow \boxed{A = LDL^T}$, sprich $LDL^T x = b \Rightarrow \boxed{Lc = b}$ mit $\boxed{Dd = c}$ mit $\boxed{L^T x = d}$

  - L ist untere Δ-matrix, D ist Diagonalmatrix, L^T ist obere Δ-matrix



Btw: allgemein gilt $A = LD\tilde{U}$, halt wenn $A = A^T \Rightarrow \tilde{U} = L^T$

Field, Vektor space

- Field (=Körper) $\boxed{\mathbb{F}}$ (𝕂): $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit $\boxed{\text{Skalare als Elemente}}$ (i, 4, 5, −1, ...)

  $\mathbb{R} \begin{cases} 1, 2, \\ \pi, e, \ldots \\ -10, \frac{1}{2} \end{cases}$ $\quad \mathbb{C} \begin{cases} 1, 2, \\ \pi, i, 50, \ldots \\ -i, \frac{i}{3} \end{cases}$ (ausführlich in Diskmath)

- Vector space (= Vektorraum) $\boxed{V}$: $\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^{m \times n}, \ldots$ $\boxed{\text{mit Vektoren, Matrizen, ... als Elemente}}$

  ↳ „mehr-dimensionaler Field" (man sagt $\mathbb{R}^n$ ist ein VS über Field $\mathbb{R}$)

  ↳ enthält jeweils mehr-dimensionen Skalare

  $\mathbb{R}^3 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \right.$ $\quad \mathbb{C}^2 \left\{ \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}^i, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \right.$ $\quad \mathbb{R}^{2 \times 2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ e & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \ldots \right.$

- Mehr Beispiele:

  - Vector space $\mathbb{R}^3$ über Field $\mathbb{R}$:

    $\boxed{x \in \mathbb{R}^3}$ mit $x = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\boxed{3, 4, 5 \in \mathbb{R}}$

    $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\mathbb{R}^3$ ..., $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Elemente des jew. VS

wie man sieht, die Skalare sind vom jew. Field.

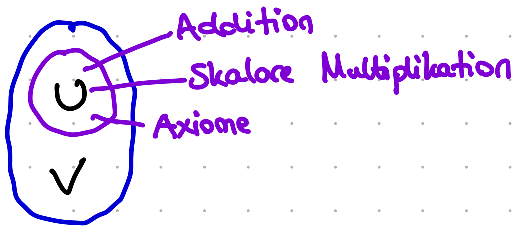
  - Vector space $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ über Field $\mathbb{C}$:

    $\boxed{A \in \mathbb{C}^{2 \times 2}}$ mit $A = \begin{bmatrix} i & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\boxed{i, 2, 3, 4 \in \mathbb{C}}$

    $\begin{bmatrix} i & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ ..., $\begin{bmatrix} -i & i \\ i & i \end{bmatrix}$

Sub space

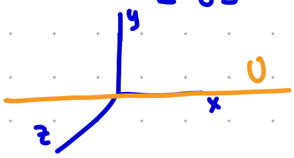
- Ein $\boxed{\text{vector space}}$ „innerhalb" eines vector spaces



↳ Eine Teilmenge des Vektorraums ist genau dann ein Unterraum, wenn sie alle Axiome eines VR erfüllt.

↳ Jeder sub space ist ein vector space!

- Bsp: $U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ a \in \mathbb{R} \right\}$ ist ein 1-dimensionaler sub space des vector space $\mathbb{R}^3$



Wir sehen U hat 1-Dimension, ist aber im $\mathbb{R}^3$!

Vector space / Sub space Closure (Abgeschlossenheit)

Jeder vector space muss erfüllen:

- Die Menge ist nicht leer bzw. enthält den 0 Vektor. $\boxed{0 \in V}$
- Für beliebige zwei Elemente $\boxed{u, v \in V}$, ist auch deren Summe $w = \boxed{(u+v) \in V}$ = closed under addition
- Für beliebige Elemente $\boxed{u \in V}$ und $\boxed{\lambda \in \mathbb{K}}$, ist auch $w = \boxed{\lambda u \in V}$ = closed under scalar multiplication
- Mit Worten: man kommt nicht aus der Menge heraus, falls man Elemente addiert, mit Skalaren multipliziert.

- Bsp: Sub space $U = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$ des $\mathbb{R}^2$, (obv. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$).

  egal welche zwei, $\underbrace{\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}}_{\in U} + \underbrace{\begin{bmatrix} b \\ b \end{bmatrix}}_{\in U} = \underbrace{\begin{bmatrix} a+b \\ a+b \end{bmatrix}}_{\Rightarrow \in U}$

  egal welcher Skalar, $\underbrace{\alpha}_{\in \mathbb{R}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}}_{\in U} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha a \\ \alpha a \end{bmatrix}}_{\Rightarrow \in U}$.

Span, Column space

- $C(A) = \{ Ax = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n,\ x \in \mathbb{R}^n \}$ is a sub space of $\mathbb{R}^m$

  C(A) ist der Raum der aufgespannt wird von allen (Spalten) Vektoren $a_1, \dots, a_n$ der Matrix.

  Dieser Raum ist sub space von $\mathbb{R}^m$, da $a_i \in \mathbb{R}^m$, $i \in \{1, \dots, n\}$.

- Basis: Linear unabhängiges C(A), sodass C(A) = V.

  bzw. lin. ind. Menge an Vektoren sodass span{Menge} = V. (z.B. $\text{span}\{\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}\} = \mathbb{R}^2$.

  nächste Woche mehr!

5. Aufgaben

- Vektorraum $\mathbb{R}^2$

  Unterräume: $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$

  $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$

  $U_3 = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

  $U_4 = C\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right)$

  (1) Zeichne

  (2) Bestimme die jew. Dimension (rank)

  (3) Gebe eine Basis

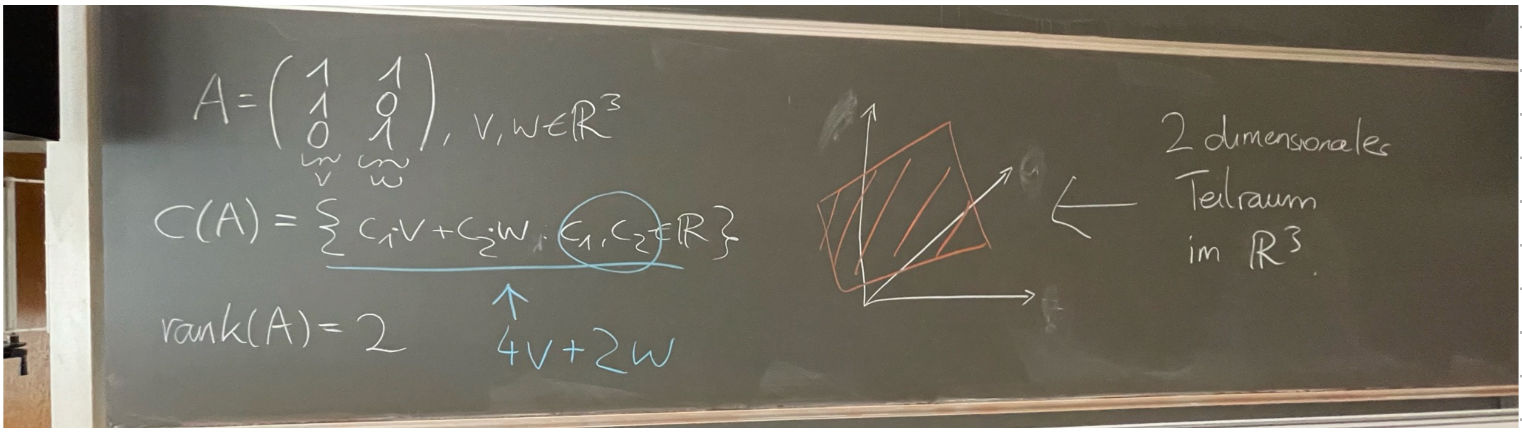
- Vektorraum $\mathbb{R}^3$

  (1) Finde drei Unterräume

  (2) Finde drei Teilmengen die kein Unterraum bilden

  (3) Finde fünf Basen des $\mathbb{R}^3$.

- Recap



6. Nächste Woche (5)

- Null space $N(A)$ = Lsgn. des $Ax = 0$
- Echelon form = Zeilenstufenform $\begin{bmatrix} a & d & f \\ & b & e \\ & & c \end{bmatrix}$
  - Reduced Echelon form $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$
- Gauss-Jordan elimination

3.2

- Complete Solution to $Ax=b$ es gibt entweder
  - keine
  - genau 1
  - ∞-viele
  - Overdetermined / underdetermined
  - Solution rank / dimension, basis, space Lsgn!
- 4 Fundamental Subspaces

3.3, 3.4 (maybe)

7. Quiz

- Kahoot.it!