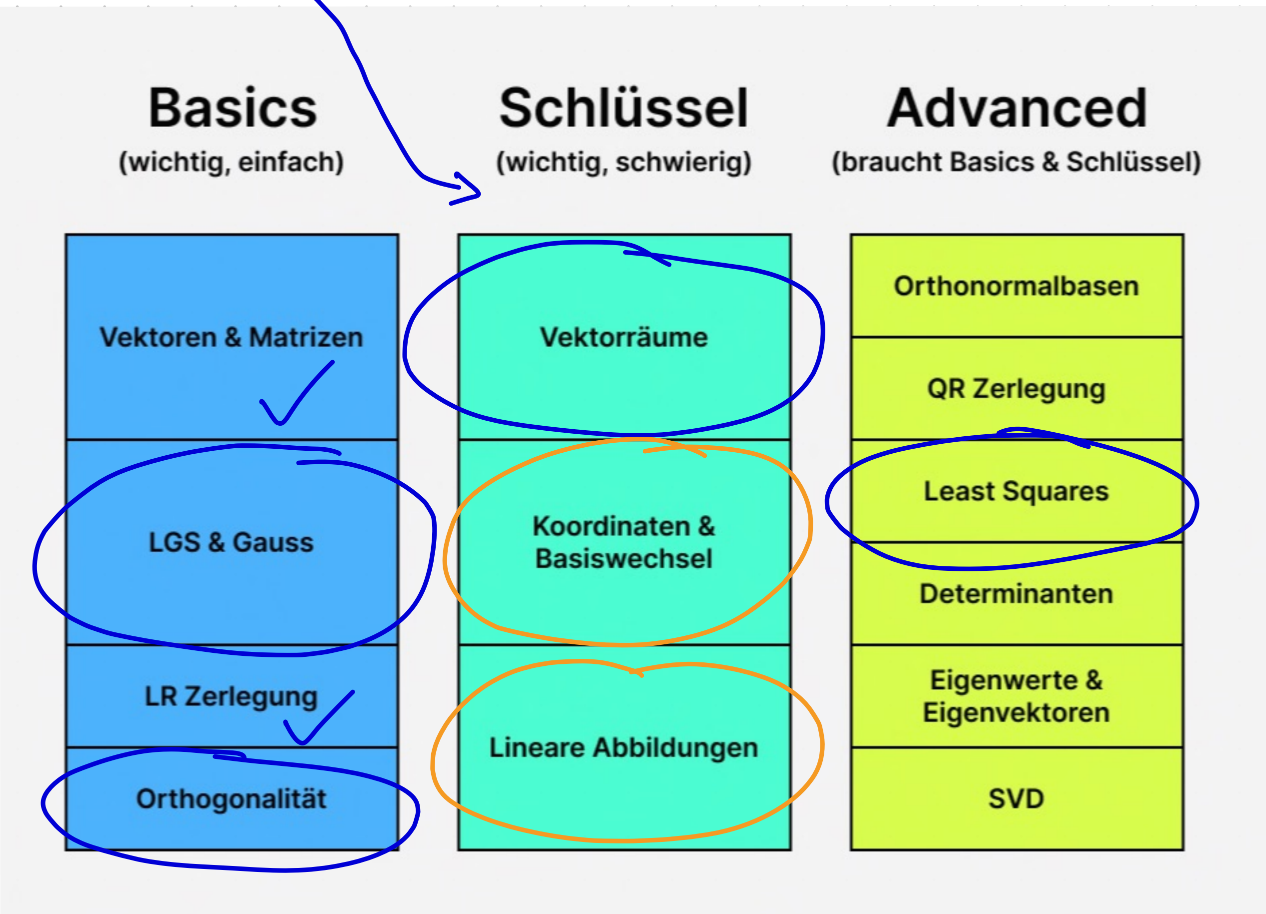
Lineare Algebra

Übungsstunde 5

1. Orga
2. GA
3. Recap: A4
4. Priorisierte Wiederholung
5. Aufgaben
6. Nächste Woche
7. Quiz

1. Orga

- Wir sind angekommen!



- ■ diese, nächste, <u>übernächste</u> Woche (ziemlich wahrscheinlich)
- ■ danach, Schlüssel, Schlüssel (Tempo wird erhöht, hier schalten die aller meisten ab!)
  - ↳ alle roten Themen Basics + Vektorräume gut beherrschen

- 3 Blue 1 Brown: Linear Algebra series YT sehr empfohlen!
- Nächsten DI ist TA-Meeting Linalg
  - ↳ Habt ihr Fragen?

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 4
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

- [10 Minuten] Recap
  - Was ist der Span einer Menge an Vektoren $v_1, \dots, v_n$?
  - Gegeben folgende Matrix: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -7 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mit echelon form $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

    (1) rank(A)?

    (2) C(A)?

    (3) Basis C(A)?

    (4) Dimension C(A)?

    (*) N(A)?

$C(A)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\quad \parallel$

- [10 Minuten] Recap

  "Die Menge aller LK: $\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

  - Was ist der Span einer Menge an Vektoren $v_1, \dots, v_n$?

Pivots

- Gegeben folgende Matrix: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -4 \\ 3 & -5 & 1 & -7 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ mit echelon form $U = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 2 & -4 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$

(1) rank(A)? $= 3$

(2) C(A)? $= \mathbb{R}^3 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(3) Basis C(A)? $= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

(4) Dimension C(A)? $= 3$

(*) N(A)?

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & -5 & -5 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x_3 = t \in \mathbb{R}$$

Aus III: $x_4 = 0$

II: $x_2 = t$

I: $x_1 = -2t$

$$\Rightarrow L_0 = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t,\ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$A = CR$

$\uparrow$

$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 3 & -5 & -7 \\ 2 & -5 & 0 \end{bmatrix}$

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & y & 0 \\ 0 & 0 & z & 1 \end{bmatrix}$

3. Recap: A4

- **Eure Lösungen**
- **Eure Proofs sind** 👌
  - ↳ an alle: :)
  - ↳ siehe meine Version für eine „compressed", exam-Version

(1)

a) Let H be a hyperplane of $\mathbb{R}^n$.

$\Rightarrow \quad H = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot d = 0 \}$ for an arbitrary but fixed vector $d \in \mathbb{R}^n$

(i) Let u, w be Elements of H i.e. $u, w \in H$

$u, w \in \mathbb{R}^n$ and $u \cdot d = 0$ and $w \cdot d = 0$

$\Rightarrow \quad (u + w) \cdot d = u \cdot d + w \cdot d = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow \quad (u + w) \in H$

(ii) Let c be an arbitrary scalar, $c \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \quad (c \cdot v) \cdot d = c \cdot (v \cdot d) = c \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \quad (c \cdot v) \in H$

Since dv is 0
and dw must be 0 the result is the Nullspace which is Element of a Hyperplane.

3. Since $c \cdot (\overset{0}{d \cdot v}) = 0$ and 0 is an Element of H this condition is also met.

Therefore a Hyperplane H is a Subspace of $\mathbb{R}^n$.

Nice!

$\square$

b) Proof

a) We need to show that our hyperplane satisfies the 3 properties of a subspace
1- containing the 0 vector.
2- closed under vector addition.
3- closed under scalar multiplication.

Given a nonzero vector $a \in \mathbb{R}^n$ and a scalar $b \in \mathbb{R}$, we define the hyperplane:

$$H = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x = b \}$$

1. As definition our hyperplane satisfies the first condition

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = 0$$

→ per definition of Hyperplanes $ax = b$, b should be 0, which will give us our 0 vector

2. Closed under vector addition

a) In order to prove that H of $\mathbb{R}^n$ is also a subspace of $\mathbb{R}^n$, we should prove that H fulfills each 3 conditions of a subspace.
We can define H as
$H = \{ v \in \mathbb{R}^n \mid v \cdot d = 0 \}$ $d \in \mathbb{R}^n$

where H is the set of every vector $v \in \mathbb{R}^n$ which are perpendicular to an arbitrary vector $d \in \mathbb{R}^n$,

We check the 3 conditions of a subspace:

(1) H contains zero vector.

$0 \cdot d = 0$

$\square$

(2) H is closed under addition.

$v \in H, \; w \in H$

$\Rightarrow v + w \overset{?}{\in} H$

- **Meine Lösung:**

1. Subspaces of vector spaces (★★☆)

a) Let H be a hyperplane of $\mathbb{R}^n$. Prove that H is a subspace of $\mathbb{R}^n$.

b) In this exercise we consider the vector space V of all real-valued function over $\mathbb{R}$ on the interval $[0,1]$. In other words, every element $\mathbf{f} \in V$ is a function $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ and conversely, every function $\mathbf{f} : [0,1] \to \mathbb{R}$ is in V. Note that it might not be obvious that this is a vector space, but for the purpose of this exercise you can assume that it is. In particular, there exists a valid addition $\mathbf{f} + \mathbf{g}$ of such functions $\mathbf{f} \in V$ and $\mathbf{g} \in V$, and a valid scalar multiplication $c\mathbf{f}$ for a scalar $c \in \mathbb{R}$ and $\mathbf{f} \in V$ defined as follows:

$$(\mathbf{f}+\mathbf{g})(x) := \mathbf{f}(x) + \mathbf{g}(x) \qquad \text{for all } \mathbf{f}, \mathbf{g} \in V \text{ and } x \in [0,1]$$
$$(c\mathbf{f})(x) := c\mathbf{f}(x) \qquad \text{for all } \mathbf{f} \in V, x \in [0,1] \text{ and } c \in \mathbb{R}.$$

Prove that

$$U = \{\mathbf{f} \in V : \mathbf{f}(x) = \mathbf{f}(1-x) \text{ for all } x \in [0,1]\} \subseteq V$$

is a subspace of V.

a) H is a hyperplane $\Rightarrow \exists d \in \mathbb{R}^n$: $H = \{v \in \mathbb{R}^n,\ v \cdot d = 0\}$. Since $H \subseteq \mathbb{R}^n$, we check if H is sub space of $\mathbb{R}^n$:

1. $0 \in H$: $\quad 0 \cdot d = 0 \Rightarrow 0 \in H$

2. for arbitrary $v, w \in H \Rightarrow (v+w) \in H$:

   $(v+w) \cdot d = vd + wd = 0 + 0 = 0$

3. for arbitrary $\alpha \in \mathbb{R}$, $v \in H \Rightarrow (\alpha v) \in H$:

   $(\alpha v) \cdot d = \alpha \cdot (vd) = \alpha \cdot 0 = 0$

From 1, 2, 3 follows H is sub space of $\mathbb{R}^n$. $\square$

b) We prove U is subspace of V:

1. $0 \in U$: $\quad 0(x) = 0 = 0(1-x) \quad \forall x \in [0,1]$

2. for arbitrary $f, g \in U \Rightarrow (f+g) \in U$:

   $(f+g)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) + g(x) \overset{f,g \in U}{=} f(1-x) + g(1-x) \overset{\text{def}}{=} (f+g)(1-x)$

3. for arbitrary $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \in U \Rightarrow (\alpha f) \in U$:

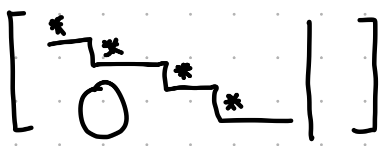
   $(\alpha f)(x) \overset{\text{def}}{=} \alpha f(x) \overset{f \in U}{=} \alpha f(1-x) \overset{\text{def}}{=} (\alpha f)(1-x)$

From 1, 2, 3 follows U is subspace of V. $\square$

4. Priorisierte Whl.

Row Echelon Form ∧ Reduced Row Echelon Form

- Row echelon form (= Zeilenstufenform):



$$\text{row echelon form}\;\; \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -2\,\text{III}$$

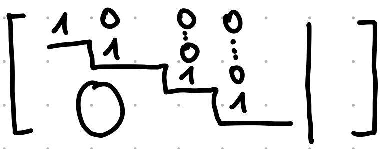
$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] +4\,\text{III}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] -\tfrac{1}{3}\,\text{II}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} :2 \\ :3 \\ \end{array}$$

$$\text{reduced row echelon form}\;\; \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

- Reduced ist EF aber die Pivotspalten sind unit vectors:



LSE Solution Space

- Jedes LSE hat entweder $\boxed{0}$, $\boxed{\infty\text{-viele}}$, oder $\boxed{\text{genau eine}}$ Lösung.
- Beispiel:

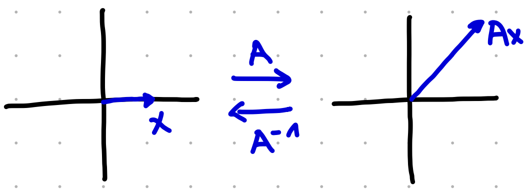
$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right] \Rightarrow \text{keine Lösung } ↯$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right] \Rightarrow \text{genau eine Lsg.}$$

x_3 frei wählbar

$$\left[\begin{array}{ccc|c} * & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \infty\text{-viele Lsgn.}$$

Matrix-Vektor Multiplikation: Geometrische Intuition



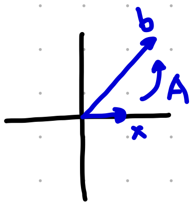
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizen A ändern die Werte von Vektoren.

Sie bringen Vektoren an neue Positionen. (Angenommen wir bleiben im selben Raum)

LGS: Geometrische Intuition (Matrix Schreibweise)

$Ax=b$ stellt die Frage:



gibt es einen Vektor x, sodass $Ax=b$? (wir b erreichen)

↳ falls ja, wie viele und welche!

- unendlich viele Lsg sieht dann so aus:

Alle x auf der geraden bilden auf b ab.

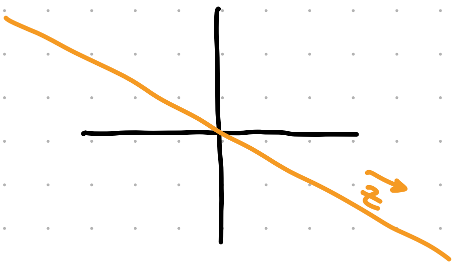
- Jede Lösung x des LSE ist eine Kombination aus einer special solution ($Ax=0$) und einer particular solution ($Ax=b$)

Geometrisch:

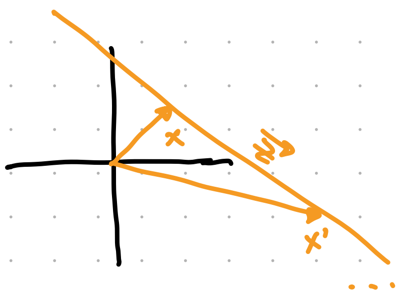
$\vec{z}$ ist eine Lsg des homogenen LGS und somit automatisch ein Richtungsvektor.

Wegen der Geradengleichung aus Ortsvektor und Richtungsvektor.

Da eine Lsg von $Ax=0$ ⇒ Ortsvektor ist 0



Für $Ax=b$ muss dann bloß ein beliebiger Vektor dazu addiert werden. z.B.:



5. Aufgaben

▪ Elimination of general matricies

- Case 1: $Ax = b$ hat genau eine Lsg.

row echelon form

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 3 & 11 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & 1 & 1 \\ 0 & \boxed{-7} & 1 & 9 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & 12 \end{array}\right] \quad \boxed{\text{pivots}} \Rightarrow \operatorname{rank} A = 3$$

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow \text{Aus III: } & x_3 = 2 \\ \text{II: } & -7x_2 = 9 - 2 \Rightarrow x_2 = -1 \\ \text{I: } & 2x_1 = 1 + 3 - 2 \Rightarrow x_1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Case 2: $Ax = b$ hat ∞-viele Lsgn:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 11 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \boxed{\text{pivots}} \Rightarrow \operatorname{rank} A = 2$$

Man sieht, x_3 ist eine freie Variable

Aus III: $\boxed{x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}}$ weil x_3 frei wählbar können wir ein $t \in \mathbb{R}$ bel. nehmen.

II: $2x_2 = 3 - t \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} - \frac{t}{2}$ Falls mehrere freie Var: $x_4 = s$, $x_5 = u$, ...

I: $x_1 = 1 + 2t$

$$\Rightarrow L_x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie wir sehen, erhalten wir ∞-viele Lsgn.

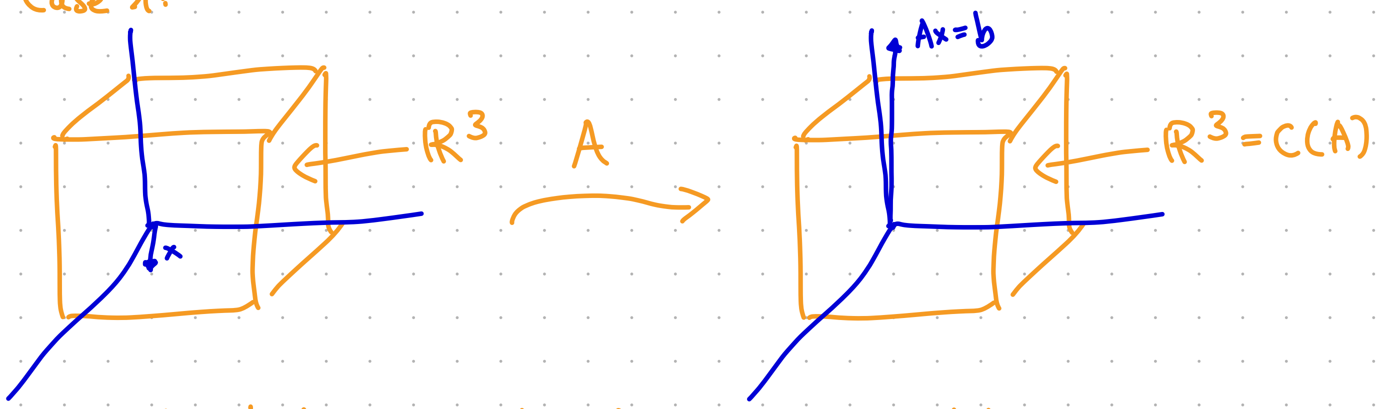
- Case 3: $Ax = b'$ hat keine Lsg:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 6 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \quad \boxed{\text{pivots}} \Rightarrow \operatorname{rank} A = 2$$

$\Rightarrow 0 \cdot x_3 = -1$ ↯ Widerspruch!

$\Rightarrow$ keine Lösung für $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

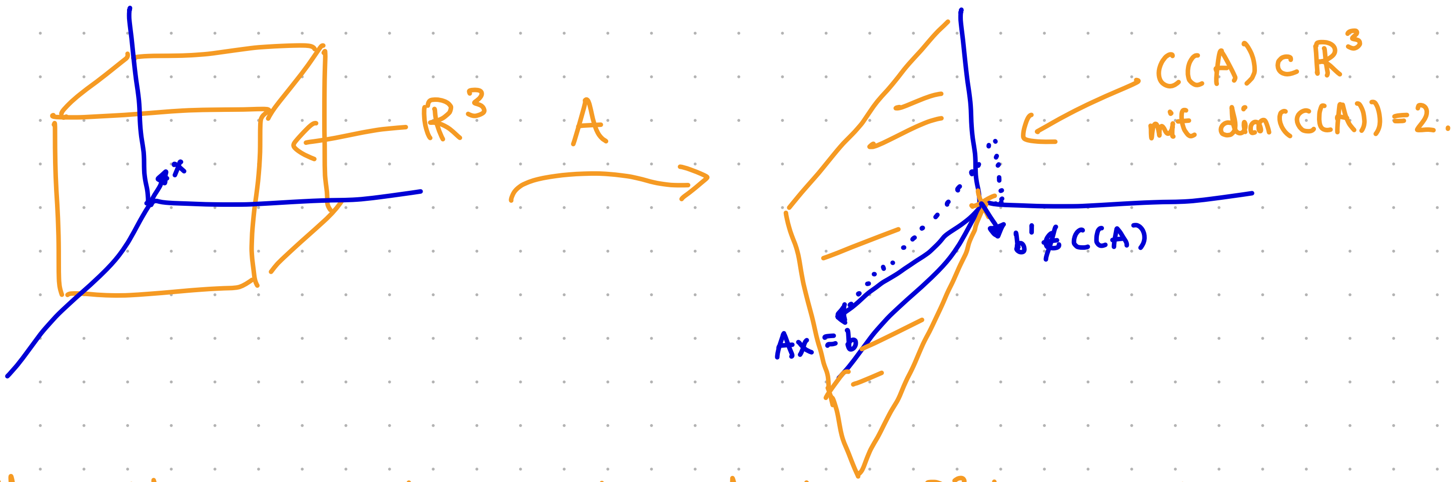
• Case 1:



Da vor und nach der Abbildung durch A wir 3 Dimensionen haben,

ändert A bloß eindeutig die Position der Vektoren im $\mathbb{R}^3$.

• Case 2/3:



Nun erreichen wir nur noch 2-Dimensionen, da wir vom $\mathbb{R}^3$ kommen, verlieren wir

genau 1-Dimension.

↳ was wir erreichen: $C(A)$

↳ was wir verlieren: $N(A)$

Basis C(A) berechnen

Die Vektoren nehmen an den Pivotstellen der ursprünglichen Basis, denn diese sind die lin. ind. von A!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 11 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Rightarrow C(A) = \operatorname{span}\Big\{ \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}}}_{=\text{Basis}} \Big\}$$

bzw. es gilt $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

wobei $A = CR$.

N(A) berechnen

$\boxed{\text{Literally } Ax=0 \text{ (homogeneous LSE) berechnen.}}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & -1 & 0 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{1} & 0 & -2 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Aus III: $x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$

II: $2x_2 = -t \Rightarrow x_2 = -\frac{t}{2}$

I: $x_1 = 2t$

$$\Rightarrow L_0 = \left\{ \underline{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Wie man sieht ist die Lösungsmenge für jedes b ist einfach der jew. Ortsvektor plus $x_0 \in L_0$ bel.

$$L_x = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + \underline{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}} \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

=

$$\Rightarrow N(A) = \text{span}\left\{ \underbrace{\boxed{\begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}}_{= \text{Basis}} \right\}$$

N(A) berechnen nach Lecture

- $\rightsquigarrow \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\end{matrix}} & \begin{matrix}2\\0\end{matrix} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}3\\-2\end{matrix} \end{bmatrix}$ ← von der Lecture

[1] Von Echelon zu Reduced Echelon

Da bereits in reduced echelon form

unit vektor

[2] $\Rightarrow R = \begin{bmatrix} 1 & \boxed{\begin{matrix}2\\0\end{matrix}} & 0 & \boxed{\begin{matrix}3\\-2\end{matrix}} \\ 0 & & 1 & \end{bmatrix}$ Essentially: nehme den nicht e_i Teil und negiere ... $\longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\Rightarrow Rx = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{= F} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow -F = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ und merke dir: $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist von x_2, $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist von x_4

$$\Rightarrow \text{Basis } N(A): \left\{ \begin{bmatrix} \boxed{-2} \\ 1 \\ \boxed{0} \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \boxed{-3} \\ 0 \\ \boxed{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$x_2 = 1$, $x_4 = 0$ $x_2 = 0$, $x_4 = 1$

Für den jew. Vektor i: $x_i = 1$ und der Rest $x_j = 0$

• Das Gleiche mehr „intuitiv":

braucht nicht unbedingt reduced echelon, aber nice to have

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right]$$ wir sehen zwei freie Var.

$\Rightarrow x_2 = t \in \mathbb{R}, \; x_4 = s \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Aus II: $x_3 = 2s$

I: $x_1 = -2t - 3s$

$$\Rightarrow L_0 = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\Rightarrow \text{Basis } N(A): \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

6. Nächste Woche (6)

- LSE + Solution rank / dimension, basis, space
- 4 Fundamental subspaces

3.4, 3.5

- Orthogonality
- Orthogonal complement $V^{\perp}$

4.1, maybe

7. Quiz

- Kahoot.it!