Lineare Algebra

Übungsstunde 6

1. Orga
2. GA
3. Priorisierte Wiederholung
4. Recap Alles
5. Recap: A5
6. Nächste Woche
7. Quiz

1. Orga

- Wir sind angekommen!

Basics (wichtig, einfach)	Schlüssel (wichtig, schwierig)	Advanced (braucht Basics & Schlüssel)
Vektoren & Matrizen	Vektorräume	Orthonormalbasen
LGS & Gauss	Koordinaten & Basiswechsel	QR Zerlegung
LR Zerlegung	Lineare Abbildungen	Least Squares
Orthogonalität		Determinanten
		Eigenwerte & Eigenvektoren
		SVD

Nope! Wir sind schon essentially fertig mit Schlüsselthemen! 😂

Basics (wichtig, einfach)	Schlüssel (wichtig, schwierig)	Advanced (braucht Basics & Schlüssel)
Vectors & Matrices	Vector Space	Orthogonality
LSE & Gauss	Terms *(Rank, Basis, Span, CR Decomposition, Null Space, Column Space, Dimension)*	<Least Squares>
<LU Decomposition>	Linear Transformation	<QR Decomposition>
Complex Numbers		Determinates
		Eigenvalues & Eigenvectors
		SVD & PCA

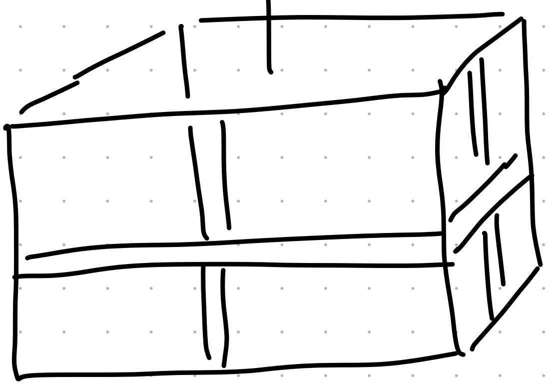
<> wird nicht weiter im Kurs gebraucht ----- hängen direkt miteinander zsm

- weniger mathematisch

- Karl hat Geburtstag!

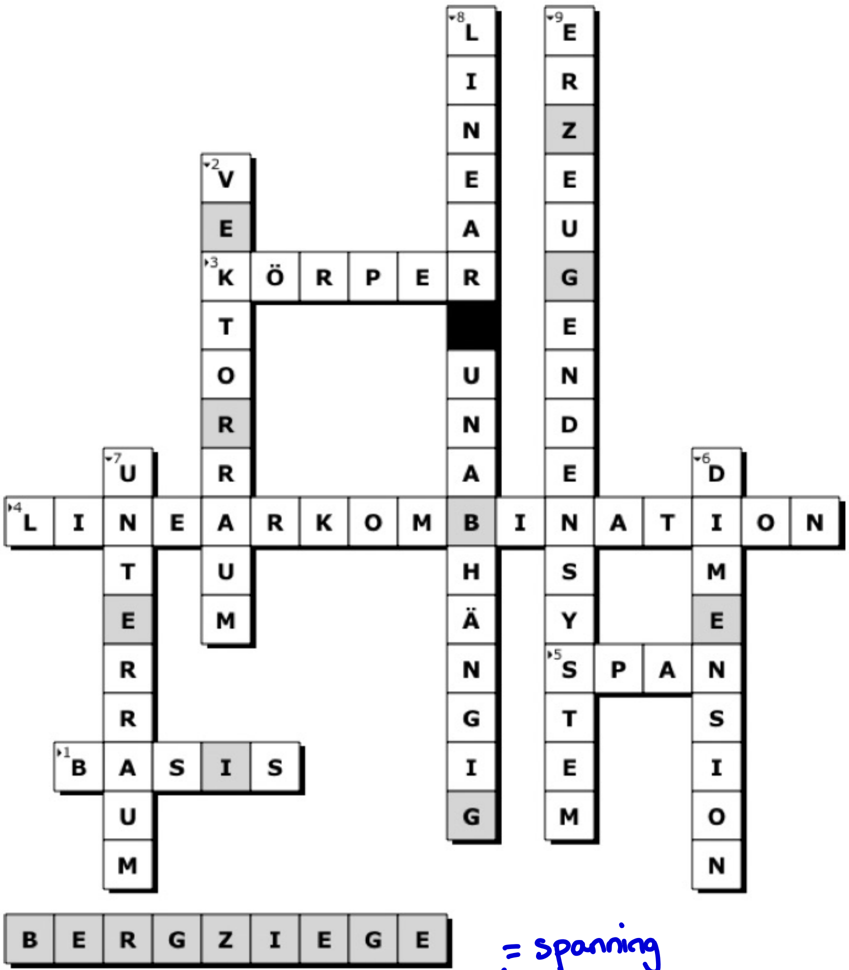
↳ Ich hab ein Geschenk:

Überraschungs-Test!



Link scannen:

- Test 1:
  - ↳ Jeder Term kommt max. 1x ran
  - ↳ Verständnis Test, für die Selbsteinschätzung
  - ↳ Tipps:
    - Erzeugendensystem = Spanning set ($\operatorname{span}\{\_\} = V$)
    - span „=" column space ($\operatorname{span}\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\} = C(\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix})$)



= spanning

1. Eine Menge an Vektoren, die jeden Vektor in einem Vektorraum eindeutig linear-kombinieren kann. Basis (erzeugend ∧ linear unabhängig)
2. Zum Beispiel $C(A)$ und $N(A)$. Eine abgeschlossene Menge. Ist immer über einen Körper definiert. Erfüllt einige Axiome. Vector spaces (Jeder sub space ist ein VS selbst!)
3. $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ Fields
4. Jeder Vektor in einem Vektorraum besteht aus einer ... von Basisvektoren. Linear combination
5. Die Menge aller Linearkombinationen. Span
6. Die Mindestanzahl an Vektoren, die benötigt wird, damit sie zusammen den Vektorraum spannen können. Dimension (# Vektoren einer Basis)
7. Eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die durch den Ursprung geht. Sub space of $\mathbb{R}^3$
8. Seien v, w zwei Vektoren. Es gilt: $dim(span\{v, w\}) = 2$. Wie nennt man v und w? Linearly independent
9. Gegeben eine Menge M an Vektoren in einem Vektorraum V. Es gilt: $\exists x \in M$ mit $span(M - \{x\}) = V$. Wie nennt man M?

- Wenn $span(M - \{x\})$ immer noch ganz V spannt, so muss M erzeugend (=spanning) sein.
- Ferner, $M - \{x\}$ erzeugend heißt M ist lin. dep. und keine Basis

$\Rightarrow$ M ist Erzeugendensystem / Spanning set

Bsp: $\mathbb{R}^2$: $M = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}$

$\Rightarrow span(M - \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \}) = \mathbb{R}^2$

aber auch $span(M) = \mathbb{R}^2$.

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind: Vorlesungen Woche 5
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

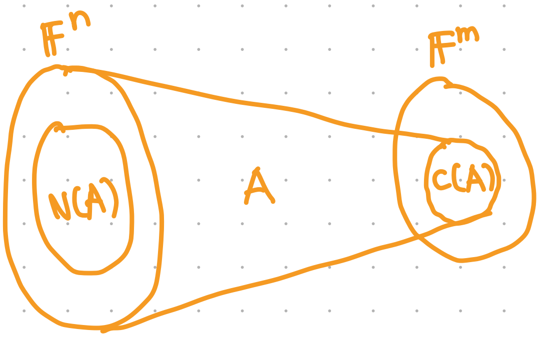
3. Priorisierte Whl.

Fundamental Subspaces

- Für jede Matrix $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ gibt es genau vier fundamental subspaces:
- Nullspace: $\boxed{N(A)}$, Left nullspace: $\boxed{N(A^T)}$ $\quad$ $\dim N(A) = n-r$, $\dim N(A^T) = m-r$
- Columnspace: $\boxed{C(A)}$, Rowspace: $\boxed{R(A) = C(A^T)}$ $\quad$ $\dim C(A) = \dim C(A^T) = r$
- Es gilt:
  - $\mathbb{F}^n = N(A) \oplus C(A^T)$

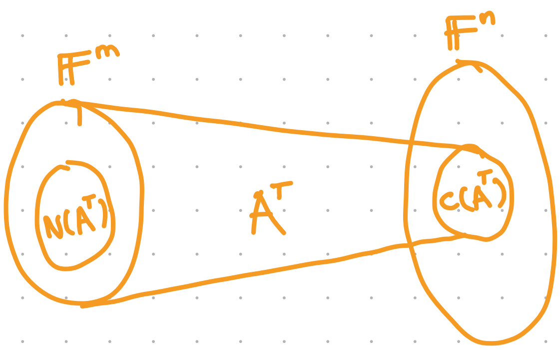
orthogonal complement, kommt bald.

  - $\mathbb{F}^m = N(A^T) \oplus C(A)$



und:

  - $N(A) = C(A^T)^{\perp} \subset \mathbb{F}^n$
  - $N(A^T) = C(A)^{\perp} \subset \mathbb{F}^m$



  - Nullraum $N(A) = \mathrm{Ker}\,A$
  - Spaltenraum $C(A) = \mathrm{Im}\,A$

} Ker A, Im A kommt bald.

Special and particular Solution of LSE

- Die Lösungsmenge eines LSE kann man schreiben als Summe von
  - $\boxed{\text{einer particular solution } Ax = b}$, sowie
  - $\boxed{\text{allen special solutions } Ax = 0}$

  $L_x = x + L_0$, wobei $Ax = b$

- Beispiel:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 6 & -1 & 11 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad x_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$

Aus II: $2x_2 = 3 - t \quad \Rightarrow x_2 = \frac{3}{2} - \frac{t}{2}$

I: $x_1 = 1 + 2t$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_x = \left\{ \begin{pmatrix} 1+2t \\ 3/2 - t/2 \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{particular} \\ x}} + \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{special sols} \\ \mathcal{L}_0}} \middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

- Vorlesungsweg: (Spick!)
  - Special solutions: $(Ax = 0)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{reduced REF}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad -F = \begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{bmatrix}$ wobei $\begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist von x_3

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_0 = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = C\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\}$$

  - Particular solution: $(Ax = b)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad x_3 = 0$

Aus II: $2x_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3/2$

I: $\quad x_1 = 1$

$$\Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Recap Alles

Field, Vector Space

- Field (=Körper) $\boxed{\mathbb{F}}$

$\mathbb{R} \left\{ 1, 2, \pi, e, \dots, -10, \frac{1}{2} \right.$ $\quad$ $\mathbb{C} \left\{ 1, 2, \pi, i, 50, \dots, -i, \frac{i}{3} \right.$ (ausführlich in Diskmath)

- Vector space (= Vektorraum) $\boxed{V}$

↳ „mehr-dimensionaler Field" (man sagt $\mathbb{R}^n$ ist ein VS über Field $\mathbb{R}$!)

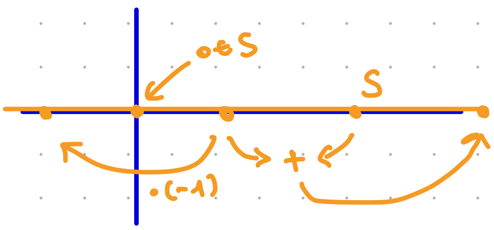
$\mathbb{R}^3 \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ \pi \\ 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right.$ $\quad$ $\mathbb{C}^2 \left\{ \begin{pmatrix} i \end{pmatrix}^{i}, \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right.$ $\quad$ $\mathbb{R}^{2\times 2} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi & \pi \\ e & e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \dots \right.$

Sub Space

- Ein $\boxed{\text{vector space}}$ „innerhalb" eines vector spaces

$S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \dots \right\} \subset \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\pi \\ 3 \end{pmatrix}, \dots \right\}$



- muss erfüllen
  - ↳ $0 \in S$
  - ↳ $\forall\, u, v \in S \Rightarrow (u+v) \in S$
  - ↳ $\forall\, u \in S, \alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow (\alpha u) \in S$

$S = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Span

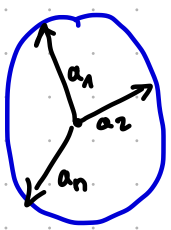
$[\;] = c_1[\;] + c_2[\;] + \dots + c_n[\;]$

- Linearkombination: $\boxed{x = c_1 a_1 + \dots + c_n a_n}$, wobei $c_i \in \mathbb{K}$ Skalar und $a_i \in \mathbb{R}^n$ Vektor

- Span: $\boxed{\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}}$ = Menge <u>aller</u> Linearkombinationen aus $a_1, \dots, a_n$

  $= C(A) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}$ falls $A = [a_1 \cdots a_n]$

  = Menge aller möglichen Vektoren, die aus $a_1, \dots, a_n$ linear kombiniert werden können



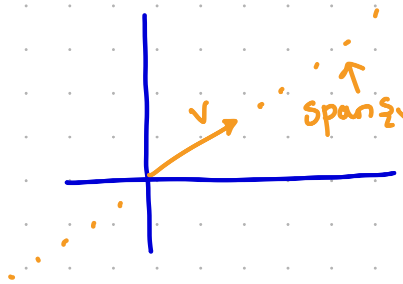
$\operatorname{span}\{a_1, \dots, a_n\}$ ist ein Vektorraum, aufgespannt von Vektoren $a_1, \dots, a_n$

Bsp: $\operatorname{span}\{\binom{1}{0}, \binom{0}{1}\} = \mathbb{R}^2$

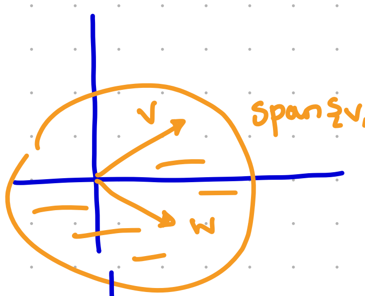
Spanning / Generating Set

- Eine Menge an Vektoren, die den Vectorspace spannt!

  ↳ falls $\boxed{\operatorname{span}\{v_1, \dots, v_n\} = V}$

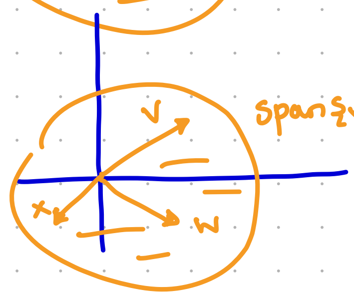


$\operatorname{span}\{v\}$, erzeugt nicht $\mathbb{R}^2$!



$\operatorname{span}\{v, w\}$, erzeugt $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Spanning Set!



$\operatorname{span}\{v, w, x\}$, erzeugt auch $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Spanning Set!

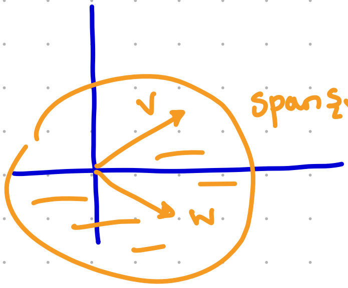
Basis

- $\boxed{\text{Spanning set + linear unabhängig!}}$

  ↳ daher die mindest Anzahl an Vektoren, die benötigt werden um den Vektorspace zu spannen.

- Dimension = Anzahl Vektoren, die eine Basis des VS benötigt

  $= \dim V$



span$\{v, w\}$, erzeugt $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ Spanning Set + linear unabhängig

$\Rightarrow$ Basis!

Column Space C(A)

- $C(A) = \{ Ax,\ x \in V \}$

  $=$ span der Spaltenvektoren von A

- rank(A) = Dimension des C(A) bzw. # Basisvektoren des C(A), der Lin. ind. Spalten

Null Space N(A)

- Lösungsmenge des $\underbrace{Ax = 0}_{\text{homogeneos LSE}}$

CR-Decomposition

- $A = CR$ wobei $\boxed{\text{rank}A = \text{rank}C}$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\boxed{C \in \mathbb{R}^{m\times r}}$, $R \in \mathbb{R}^{r\times n}$

  Falls $\boxed{w = u + v}$: $\begin{bmatrix} | & | & | \\ v & u & w \\ | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} | & | \\ v & u \\ | & | \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \end{bmatrix}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

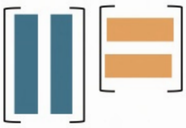
- C ist die „lin. ind." Version von A

- Es gilt $C(A) = C(C)$

z.B. $\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

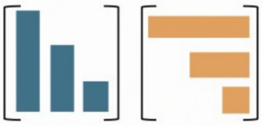
The Five Factorizations of a Matrix

$$A=CR$$



C First r independent columns of A
R Combines the columns in C to produce all columns in A

$$A=LU$$



L Lower triangular matrix/all ones on the diagonal
U Upper triangular matrix/no zeros on the diagonal

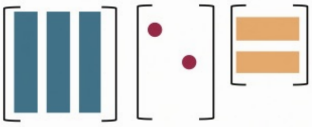
$$A=QR$$

Q Columns are orthogonal unit vectors
R Triangular R combines those orthonormal columns of Q to produce the columns of A

$$S=Q\Lambda Q^T$$
$$SQ=Q\Lambda$$

Q Columns of Q are orthonormal eigenvectors of S
Λ Diagonal matrix: Real eigenvalues of S

$$A=U\Sigma V^T$$
$$AV=U\Sigma$$



U Orthonormal singular vectors (outputs from A)
Σ Diagonal matrix: Positive singular values of A
V Orthonormal singular vectors (inputs to A)

5. Recap: A5

- nicht einfach!

  ↳ habe bloß acht Abgaben erhalten

- Eure Lösungen
-

- **Meine Lösung:**

Nullspace and column space (hand-in) (★★☆)

Let $\mathbf{v}$ be a *unit vector* (i.e. $\| \mathbf{v} \| = 1$) in $\mathbb{R}^3$. Consider the 3×3 matrices A and P defined by

$$A := \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T}, \qquad P := I_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^\mathsf{T} = I_3 - A$$

where I_3 is the 3×3 identity matrix.

a) Calculate A^2 and P^2. Try to simplify the expressions you get as much as possible.

a) $A^2 = A \cdot A = (vv^T)(vv^T)$

$= v\underbrace{v^T v}_{=1}v^T = vv^T = A$

$P^2 = P \cdot P = (I_3 - A)(I_3 - A) = I_3^2 - 2I_3A + A^2$

$= I_3 - 2A + A$

$= I_3 - A = P$

b) Let $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ be orthogonal to $\mathbf{v}$ (i.e. $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$). Prove $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$.

c) Now let $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ be a vector satisfying $A\mathbf{w} = \mathbf{0}$. Prove $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.

d) Based on b) and c), describe the nullspace $\mathbf{N}(A)$.

e) Determine the rank of A. Is A invertible?

b) z.z: $wv = 0 \Rightarrow Aw = 0$

$Aw = 0 \Leftrightarrow v\underbrace{v^T w}_{=0} = 0 \Leftrightarrow v \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$ □

c) z.z: $Aw = 0 \Rightarrow wv = 0$

From $Aw = vv^Tw \Rightarrow vv^Tw = 0$ we see that v^Tw must be 0 since

$v \neq 0$, $vv^T \neq 0$ per def. □

d) All vectors in $N(A)$ must be orthogonal to v,

$N(A) = \{ w \in \mathbb{R}^3, w \cdot v = 0 \}$

e) As $N(A)$ is a hyperplane of $\mathbb{R}^3$, it has dimension 2.

$\Rightarrow \operatorname{rank} A = \dim C(A) = \dim \mathbb{R}^3 - \dim N(A) = 3 - 2 = 1$

f) Prove that $\mathbf{C}(A) = \{\alpha\mathbf{v} : \alpha \in \mathbb{R}\}$.

g) Also prove that $\mathbf{C}(A) = \{\mathbf{w} \in \mathbb{R}^3 : A\mathbf{w} = \mathbf{w}\}$.

h) Use g) to prove $\mathbf{N}(P) = \mathbf{C}(A)$.

i) Finally, prove $\mathbf{C}(P) = \mathbf{N}(A)$.

f) As $A = vv^T = \begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 \cdot v & v_2 \cdot v & v_3 \cdot v \\ | & | & | \end{bmatrix}$

we see that every col. is a multiple of v.

This means any Ax is a multiple of v,

hence $C(A) = \{Ax, x \in \mathbb{R}^3\}$ is spanned by v

which gives $C(A) = \{\alpha v, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

$\Rightarrow C(A) = \text{span}\{v\} = \{\alpha v \in \mathbb{R}^3, \alpha \in \mathbb{R}\}$ $\square$

Solche Proofs brauchen normalerweise ein formales Skript (wie in Diskmath)

↳ da Linalg dieses Jahr weniger Formal, hier der Proof in Textform.

↓ Sonst

← nimmt an span{v} definiert ∧ Zshang zwischen span und column space.

↳ macht euch erstmal keine Gedanken, gegen Ende des Kurses luege wir zsm mit der Musterprüfung, wie man am Besten vorgeht

g) To prove $C(A) = \{w \in \mathbb{R}^3, Aw = w\}$ we show „$\subseteq$" and „$\supseteq$":

„$\subseteq$": Let $(\alpha v) \in C(A)$ arb., we show $A(\alpha v) = \alpha v$:

$$\begin{aligned} A(\alpha v) &= vv^T \alpha v \\ &= \alpha v v^T v \\ &= \alpha v \end{aligned}$$

$\Rightarrow C(A) \subseteq \{w \in \mathbb{R}^3, Aw = w\}$.

„$\supseteq$": Let $w \in \mathbb{R}^3$ with $Aw = w$, we see

$(Aw) \in C(A)$ per def column space.

$\Rightarrow \{w \in \mathbb{R}^3, Aw = w\} \subseteq C(A)$ $\square$

Warum „$\subseteq$" ∧ „$\supseteq$" statt „<=>" bidirectional?

↳ „<=>" braucht von C(A) auf $\{w \in \mathbb{R}^3, Aw = w\}$ umzuformen, so ein Weg ist meist kompliziert.

↳ „$\subseteq$", „$\supseteq$" bringt den Vorteil dass man jeweils die eine Seite annehmen kann!

h) $N(P) = \{w \in \mathbb{R}^3, Pw = 0\}$

$= \{w \in \mathbb{R}^3, (I_3 - A)w = 0\}$

$= \{w \in \mathbb{R}^3, w - Aw = 0\}$

$= \{w \in \mathbb{R}^3, Aw = w\} \underset{g)}{=} C(A)$ $\square$

c) To prove $C(P) = N(A)$ we show „$\subseteq$" and „$\supseteq$":

„$\subseteq$": Let $w \in C(P)$ arbit., then $\exists x \in \mathbb{R}^3$ such that $w = Px$.

We show that $Aw = 0$:

$$Aw = A(Px) = A(x - Ax) = Ax - A^2x \overset{a)}{=} Ax - Ax = 0$$

Hence $C(P) \subseteq N(A)$

„$\supseteq$": Let $w \in N(A)$ arbit., then $Aw = 0$.

We show that $\exists x \in \mathbb{R}^3 : w = Px$:

$$w = w - 0 = w - Aw = (I_3 - A)w = Pw$$

Hence $N(A) \subseteq C(P)$

$\square$

wird hier ersichtlich

„$\subseteq$" ist wie „aus $C(P) \Rightarrow N(A)$"

6. Nächste Woche (7)

- Orthogonality
- Orthogonal complement $V^{\perp}$

4.1

- Projections
- Least Squares (Prüfungsrelevant, aber wird nicht weiter im Kurs gebraucht)

$4.2 \wedge 4.3$

7. Quiz

- Kahoot.it!