Lineare Algebra

Übungsstunde 7

1. Orga
2. GA
3. Priorisierte Wiederholung
4. Recap: A6
5. Nächste Woche
6. Lineare Abbildungen
7. Quiz

1. Orga

- Schaut euch 3 Blue 1 Brown an!

2. GA: Reflexion

- [3-5 Minuten] Rewind : Vorlesungen Woche 6
  - ↳ Worum gings
  - ↳ ...

3. Priorisierte Whl.

Skalarprodukt

- Skalarprodukt $\boxed{x\cdot y = \langle x, y\rangle := x^T y}$ Liefert eine Zahl! $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Norm $\boxed{\|x\| = \sqrt{x\cdot x} = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{x^T y}}$ = „Betrag" = Länge vom Vektor x $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
- Orthogonal $\boxed{x\cdot y = \langle x, y\rangle = 0}$ = senkrecht
- Besonderheit vom Skalarprodukt und Norm:
  - ↳ bilden Vektoren auf Zahlen (Skalare) ab!
    - ↳ liefern Eigenschaften (Länge, Winkel, ...)

Orthogonal Subspaces

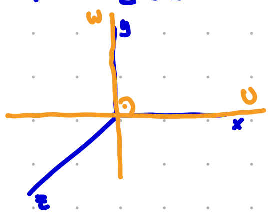
- Sei $U = \text{span}\{b_1, \dots, b_n\}$, $W = \text{span}\{c_1, \dots, c_m\}$ zwei Subspaces des Vectorspace V

  ↳ $\boxed{\forall u \in U, w \in W: \; u\cdot w = 0} \iff$ sie sind orthogonal

  Zwei Subspaces sind genau dann orthogonal wenn <u>alle</u> ihre Vektoren orthogonal zueinander sind

Bsp: $U = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right\}$



- Es gilt: $U \cap W = \{0\}$

Orthogonal Complement

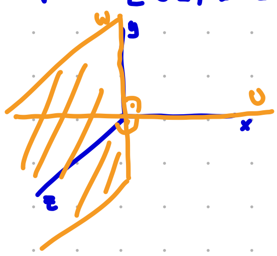
- Gilt zusätzlich $\boxed{\dim U + \dim W = \dim V}$ dann nennt man sie complementary!

  und dann orthogonale Komplemente falls zusätzlich der gemeinsame Span erzeugend ist (V spannt): $\text{span}\{b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m\} = V$.

  ($U^\perp \equiv$ orthogonales Komplement von U, bzw. $V = U \oplus U^\perp$)

$U = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\right\}$

$W = \text{span}\left\{\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right\}$



- Es gilt: $N(A) = C(A^T)^\perp$, bzw: $\mathbb{R}^n = N(A) \oplus C(A^T)$

  $N(A^T) = C(A)^\perp$ $\qquad \mathbb{R}^m = N(A^T) \oplus C(A)$

Projection onto Subspace

- Gegeben Subspace $U \subset V$ und $b \in V$, $b \notin V$:

$$\boxed{\text{proj}_U(b) = \underset{p \in U}{\text{argmin}} \|b - p\|}$$

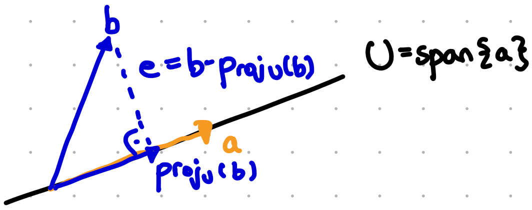
Projektion eines Vektors b auf Subspace U ist genau der Vektor $p \in U$ mit geringstem Abstand zu b.

↳ Merke: Projektionslinie muss senkrecht zu U sein

↳ Falls $U = \text{span}\{a\}$, $a \in V$, $a \neq 0$:

$$\boxed{\text{proj}_U(b) = \frac{aa^T}{a^Ta} b}$$

wobei $b - \text{proj}_U(b) \perp a$

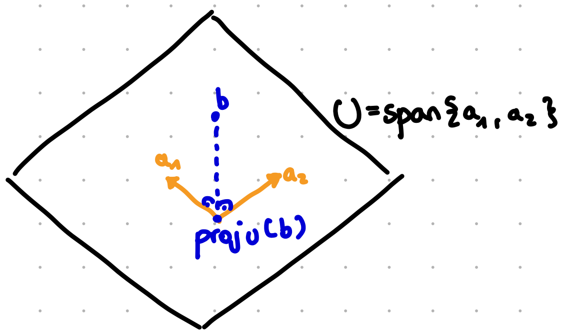


↳ Falls $U = \text{span}\{a_1, \dots, a_n\}$:

$$\boxed{\text{proj}_U(b) = A\tilde{x}}, \text{ wobei } \boxed{A^TA\tilde{x} = A^Tb}$$

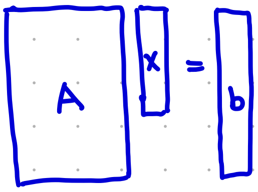
$$= \underbrace{A(A^TA)^{-1}A^T}_{= P:\ \text{Projection matrix}} b \quad \text{wenn } A^TA \text{ invertible}$$

↳ Es gilt A^TA ist invertible ∧ symmetric falls A hat vollen rank



Einleitung: Least □s

- Wenn wir ein overdetermined LSE (mehr Zeilen als Spalten) betrachten:



Da $\exists b$ mit

, $* \neq 0$ ⇒ ↯ ⇒ keine Lsg.

so können wir mit Sicherheit sagen, dass $\exists b$ mit $Ax = b$ hat keine Lsg.

- <u>Methode kleinster □</u>: Zumindest aber finden wir für $Ax \neq b$ ein $\tilde{x}$ sodass

$$\|A\tilde{x} - b\|^2 \to \text{minimal!}$$

⟹ Least Squares = Literally für <u>LSE ohne Lösung</u>, die <u>beste Approximation</u> finden

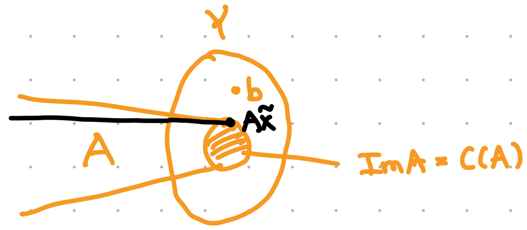
= Projektion

Least Squares

- <u>Gegeben</u>: $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ mit $\boxed{m > n}$ und $\boxed{\neg \exists x : Ax = b}$
- <u>Gesucht</u>: $\boxed{\text{Lösung } \tilde{x}}$ für $\boxed{A\tilde{x} = b}$

mit $\boxed{\|A\tilde{x}-b\|^2 \rightarrow \text{minimal}}$ Das x mit der kleinsten Norm $\|Ax-y\|^2$

- <u>Lösung</u>: Normal equations: = b auf C(A) projizieren



$\boxed{A^T A\tilde{x} = A^T b}$ LSE lösen!

↳ falls A hat vollen rank: $\tilde{x} = (A^T A)^{-1} A^T b$

4. Recap: A6

- Eure Lösungen
- Sieht nice aus!

- **Meine Lösung**

1. Underdetermined linear system (hand-in) (★☆☆)

Consider the underdetermined linear system $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ with

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 & -2 \\ -3 & 3 & 12 & -3 \\ 1 & -14 & -7 & -6 \end{pmatrix}, \text{ and } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -6 \\ -15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

a) Determine the set of solutions $\mathcal{L} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : A\mathbf{x} = \mathbf{b}\}$, i.e. write down an *explicit* characterization of this set of solutions.

Hint: In the lecture you learned that every solution can be obtained from a particular solution and a basis of $\mathbf{N}(A)$. Hence, an explicit characterization of $\mathcal{L}$ can be given by finding such a particular solution and a basis of $\mathbf{N}(A)$ and then describing the possible combinations that are solutions.

b) Write down a basis for $\mathbf{N}(A)$ (you might have already found it in the previous subtask), and also find a basis for $\mathbf{C}(A)$.

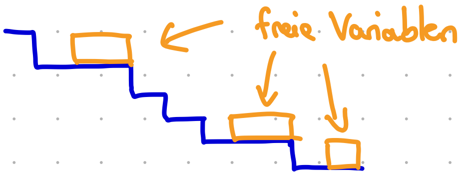
c) What are the dimensions of $\mathbf{N}(A)$, $\mathbf{C}(A)$, $\mathbf{N}(A^\top)$, and $\mathbf{C}(A^\top)$?

d) Determine a basis of $\mathbf{C}(A^\top)$.

a)
$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & -6 \\ -3 & 3 & 12 & -3 & -15 \\ 1 & -14 & -7 & -6 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -3\mathrm{I} \\ +\mathrm{I} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & -12 & -2 & -8 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -4\mathrm{II} \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 2 & 5 & -2 & -6 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 10 & \boxed{-20} & -10 \end{array}\right]$$



$\Rightarrow x_4 = t \in \mathbb{R}$, bel

Aus III: $x_3 = -1 + 2t$

II: $x_2 = -1 - (-1 + 2t) + t = -t$

I: $x_1 = 6 + 2(-t) + 5(-1 + 2t) - 2t$

$= 6 - 2t - 5 + 10t - 2t = 1 + 6t$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1+6t \\ -t \\ -1+2t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\substack{\text{particular solution} \\ Ax=b \text{ with } x_4 = 0.}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} t}_{\substack{\text{all special solutions} \\ Ax=0, \Leftrightarrow N(A).}}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

b) Basis $N(A)$: $\left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

Basis $C(A)$: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ -7 \end{pmatrix} \right\}$

Pivots

$$R = \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 2 & 5 & -2 \\ 0 & \boxed{-3} & -3 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{10} & -20 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} -1 \\ -3 \\ 1 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 3 \\ -14 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} 5 \\ 12 \\ -7 \end{matrix}} & \begin{matrix} -2 \\ -3 \\ -6 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

= Basis $C(A)$ da linear unabhängig $\wedge$ erzeugend.

c) Aus b) folgt per Def. Dimension:

$\dim N(A) = 1, \ \dim C(A) = 3$

Da $A^T \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ und $\operatorname{rank} A^T = \operatorname{rank} A = 3$

$\Rightarrow \dim N(A^T) = 0, \ \dim C(A^T) = 3$

Merkt euch:

- $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} A^T = \dim C(A) = \dim C(A^T) = r$
- $\dim N(A) = n - r$
- $\dim N(A^T) = m - r$

d) Da $\operatorname{rank} A^T = 3$:

Basis $C(A^T)$: $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -14 \\ -7 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}$

Man hätte auch wie in den Musterlösungen die Zeilenvektoren aus $\operatorname{rref}(A)$ nehmen können.

↳ Es gilt: $R(\operatorname{rref}(A)) = R(\operatorname{ref}(A)) = R(A)$

Achtung, gleiches gilt nicht für C, da rref und ref bloß Zeilenops macht bleibt der Zeilenspan.

5. Nächste Woche (8)

- Least Squares
  - Normal equation
- Linear Regression ← ML, Anwendung Least Squares
- Orthonormal Basis
- Gram-Schmidt
- Moore-Penrose Inverse ← maybe

6. Lineare Abbildungen

Einleitung: Linear Tranformations

- Für Intuition $C(A)$ ∧ $N(A)$
- Lineare Abbildungen $F: X \to Y$, sind nix anderes als Funktionen zwischen Vector Spaces

  z.B. Sei $F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

  $$F\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ 2c \end{bmatrix}$$

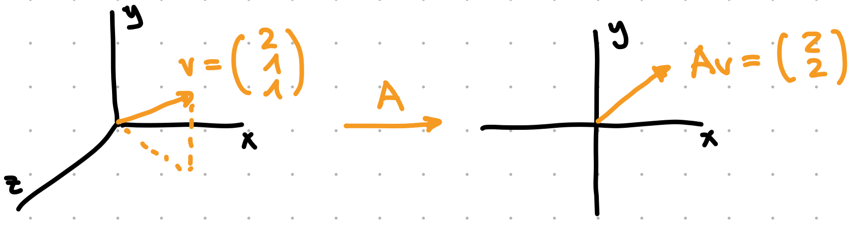
- <u>Jetzt</u>: Da sie <u>linear</u> sind kann man <u>jede</u> Lineare Abbildung als eine <u>Matrix</u> A schreiben!

  Wir haben $\forall F \exists A$: „$F \Leftrightarrow A$"

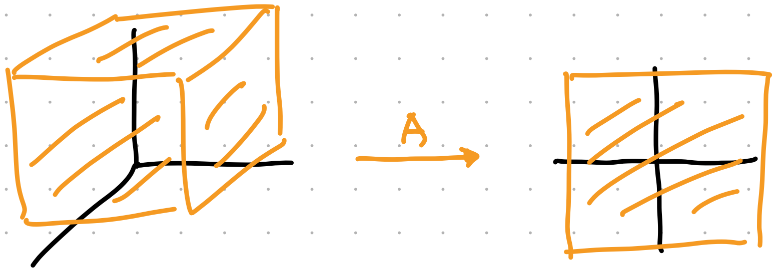
  $$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ mit}$$

  $$A \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2c \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad A: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

- Mit anderen Worten: wir können uns Matrix Vektor Multiplikationen als Abbildungen / Transformationen vorstellen!



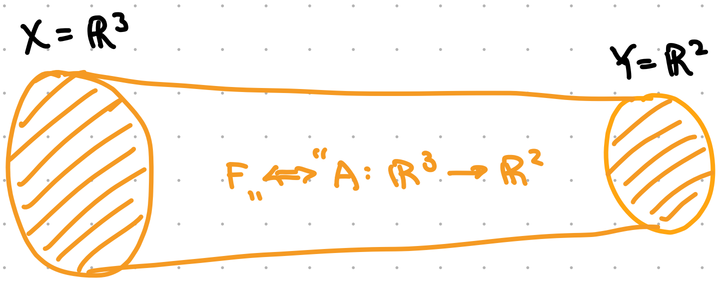
- Betrachten wir nun den ganzen Raum: (was passiert mit allen Vektoren des Definitionsraums $X = \mathbb{R}^3$)



↳ wie wir sehen: durch A/F verlieren wir eine Dimension!

↳ das macht Sinn da wir von 3D ($\mathbb{R}^3$) in den 2D ($\mathbb{R}^2$) bilden.

- Lass uns das generalisieren:

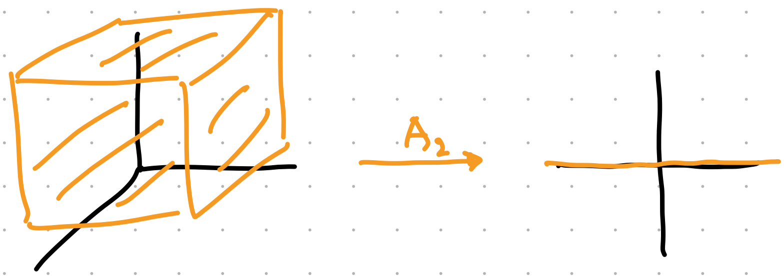


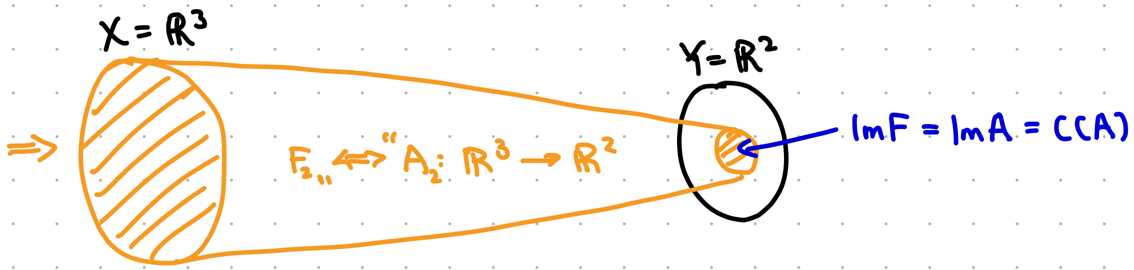
- Betrachten wir eine andere Abbildung F_2 mit A_2:

Sei $F_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$F_2\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

↳ Jetzt verlieren wir eine weitere Dimension!



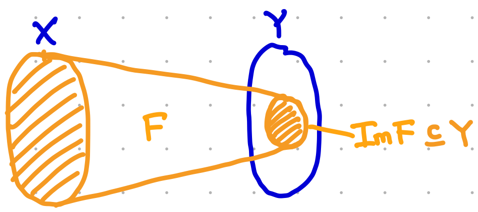


↳ Wie du siehst, es gibt viel zu analysieren mit Dimensionen, Räumen etc.

- Hier formal:

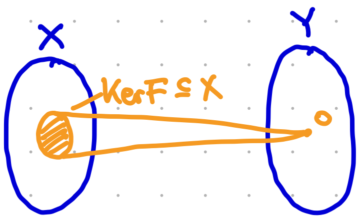
- Sei $F: X \to Y$ mit „⟺" $A: X \to Y$:
  - Image: $\boxed{\mathrm{Im}F = F(X) = C(A)}$

    „was man erhält"

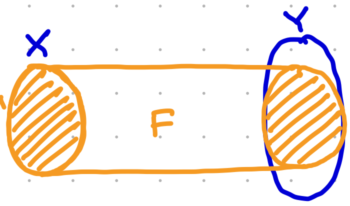


  - Kernel: $\boxed{\mathrm{Ker}F = N(A)}$

    „was man verliert"

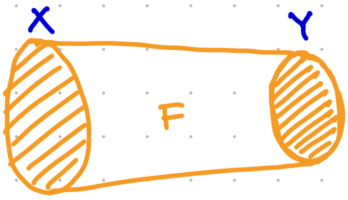


- Injektiv: $\boxed{F(x_1) = F(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2}$ „eindeutig"



$\dim(\mathrm{Im}F) = \dim X$
$\mathrm{Ker} = 0$

- Surjektiv: $\boxed{F(X) = Y}$ „erreicht alles"



$\mathrm{Im}F = Y$

- Bijektiv: $\boxed{\text{injektiv} \wedge \text{surjektiv}}$ „eineindeutig"

$\dim X = \dim Y$
$\mathrm{Im}F = Y$
$\mathrm{Ker}F = 0$

- <u>Schaut euch 3 Blue 1 Brown an!</u> !

7. Quiz

- Kahoot.it!